



UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA  
OFICINA CENTRAL DE INVESTIGACIÓN



# UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS Y APLICACIONES



SEGUNDO BASILIO CORREA ERAZO  
RICARDO VELEZMORO LEÓN



UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA



OFICINA CENTRAL DE INVESTIGACIÓN

UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL,  
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS Y APLICACIONES

S. CORREA  
R. VELEZMORO  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA  
PIURA - PERÚ

13 de noviembre de 2017

Título:

Una introducción a la Geometría Fractal, fundamentos matemáticos y aplicaciones

Autores:

SEGUNDO BASILIO CORREA ERAZO

scorreae@unp.edu.pe

RICARDO VELEZMORO LEÓN

rvelezmorol@unp.edu.pe

OFICINA CENTRAL DE INVESTIGACIÓN (OCI)

Octubre de 2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

Urb. Miraflores s/n, Castilla, Piura, PERÚ



# Dedicatoria

El presente texto está dedicado:

A mi adorada esposa Mercy, mis hijos Anderson Leonardo y Valeria Alexandra fuentes de inspiración de mi quehacer diario.

Segundo B. Correa Erazo.

A mis colegas del Departamento Académico de Matemática de la Universidad Nacional de Piura.

Ricardo Velezmoro León.

## Introducción

Los tipos de Geometría que estudiamos a lo largo de nuestra formación como profesionales de las Ciencias, generalmente sirven para modelar objetos contruidos por el hombre; en base a dichas geometrías se construyen diferentes herramientas matemáticas que permiten describir propiedades inherentes a dichos conjuntos.

Con los avances tecnológicos la obsesión del hombre por controlar la naturaleza ha crecido a pasos agigantados, sin embargo siempre se ha visto en serios problemas dado que las geometrías clásicas no son capaces de representarla. Así pues la gran interrogante que surge es ¿Cómo modelar naturaleza?

La respuesta a la pregunta anterior se debe al gran matemático Francés Benoit Mandelbroth inventor de la Geometría Fractal o también llamada Geometría de la naturaleza, dicha obra fué muy bien recibida por los científicos de la época y se considera como una gran herramienta para el estudio de fenómenos naturales.

En el presente texto denominado **UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL, FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS Y ALGUNAS APLICACIONES CON MATEMÁTICA** queremos mostrar la gran importancia que tiene este tipo de Geometría en la representación de la naturaleza. Por tal motivo hemos estructurado dicho texto de la siguiente forma:

En el capítulo I, desarrollamos conceptos básicos del Análisis, Topología y Teoría de la medida con la finalidad de facilitar una rápida conexión con el desarrollo del contenido del texto.

En el capítulo II construimos Conjuntos Fractales Clásicos utilizando los llamados “Sistemas de Funciones Iteradas”, mediante el Operador de Hutchinson, aquí describimos las características que debe poseer una transformación para que se le pueda incluir en un IFS, así como también describimos los IFS que generan Conjuntos Fractales clásicos tales como: El conjunto de Cantor (en la recta, plano y el espacio), el triángulo de Sierpinsky, esponja de Sierpinsky, la curva de Vonn Koch y la curva de Peano.

En el capítulo III se hace una caracterización de los conjuntos fractales clásicos en base a su medida y dimensión; aquí se describen algunos conceptos de la teoría de la medida para posteriormente abordar dos tipos de dimensión, estos son la dimensión de Hausdorff y la dimensión box-counting.

En el capítulo IV se aborda una forma de construcción de funciones fractales basado en el texto de Peter Massopoust; en este capítulo se describe detalladamente que se deben seguir para generar gráficas de funciones fractales teniendo en cuenta el operador de Read Bajraktarevic.

Seguidamente en el capítulo V se describe la forma en como se generan los conjuntos de Fatou, Julia y Mandelbroth en el plano complejo.

Posteriormente en el capítulo VI se mapean conjuntos fractales clásicos tales como la alfombra y el triángulo de Sierpinski usando transformaciones complejas polinomiales y luego se calcula su dimensión de cada una de las imágenes obtenidas en base a la dimensión box-counting.

Finalmente en los últimos capítulos VII y VIII se describen dos aplicaciones interesantes; estas son: El modelado de algunas especies de plantas en 2D y en las telecomunicaciones. Para ello se detalla la forma en que se puede usar este tipo de geometría teniendo en cuenta la propiedad de autosimilitud que presentan cada una de las imágenes fractales.

S. Correa.  
R. Velezmoro.



# Índice general

Dedicatoria . . . . .	9
Introducción . . . . .	9
<b>1. Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. ¿Cómo nacen los Fractales? . . . . .	9
1.2. Elementos de Análisis y Topología . . . . .	22
1.3. Transformaciones Contractivas en el plano . . . . .	30
1.4. Sistemas de Funciones Iteradas . . . . .	34
<b>2. Construcción de Conjuntos Fractales Clásicos</b>	<b>43</b>
2.1. Teorema del Punto Fijo . . . . .	43
2.2. La métrica de Hausdorff . . . . .	45
2.3. El Operador de Hutchinson . . . . .	48
2.4. Existencia de Conjuntos Fractales . . . . .	51
<b>3. Caracterización de Conjuntos Fractales Clásicos</b>	<b>55</b>
3.1. álgebras, $\sigma$ -álgebras y medida . . . . .	55
3.2. Medida y dimensión de Hausdorff . . . . .	60
3.3. Dimensión de Conteo de Cajas . . . . .	66
3.4. Técnicas Computacionales de Cálculo . . . . .	70
<b>4. Funciones Fractales</b>	<b>75</b>
4.1. Funciones Fractales como límites de series . . . . .	75
4.2. El Operador de Read-Bajraktarevic . . . . .	79
4.3. Funciones en base a IFS interpolantes . . . . .	83
<b>5. Fractales en el plano complejo</b>	<b>89</b>
5.1. Los Conjuntos de Fatou y Julia . . . . .	89
5.2. El Conjunto de Mandelbroth . . . . .	93
<b>6. Transformaciones complejas en fractales clásicos</b>	<b>95</b>
6.1. Mapeos Polinomiales . . . . .	96
6.2. La construcción . . . . .	97
6.3. Sobre la dimensión de las imágenes. . . . .	101
<b>7. Modelamiento de Plantas en 2D</b>	<b>105</b>
7.1. Construcción de transformaciones que modelan plantas . . . . .	105
7.2. Códigos que generan plantas en Mathematica 10.0 . . . . .	114

7.3. Imágenes naturales mediante IFS . . . . .	116
<b>8. Una aplicación en las telecomunicaciones</b>	<b>123</b>
8.1. Introducción . . . . .	123
8.2. Diseño de antena de copo de nieve . . . . .	124
8.3. Simulación y resultados . . . . .	125
8.4. Medidas de construcción y laboratorio . . . . .	127
Conclusiones . . . . .	130
Recomendaciones . . . . .	131
Bibliografía . . . . .	134

# Capítulo 1

## Preliminares

*...La historia hace a los hombres sabios; la poesía, ingeniosos; las matemáticas, sutiles; la filosofía natural, profundos; la moral, graves; la lógica y la retórica, hábiles para la lucha...*

FRANCIS BACÓN

Sin lugar a dudas, no se puede abordar ningún tema relacionado con las ciencias, sin tener alguna base matemática que nos respalde. Grandes científicos lo validan, por ejemplo **Leonardo Da Vinci (1452-1519)** comentó en una oportunidad lo siguiente:

*...Quien ama la práctica sin teoría es como el marinero que se embarca sin timón ni brújula y nunca sabe dónde ir...*

Esta célebre frase, nos permite afirmar que para entender y dominar un tema en matemáticas debemos entender en primer lugar la idea intuitiva; esto significa que debemos saber cómo nace el tema, de dónde nace y cuál es la aplicación que se puede realizar más adelante, ya sea en el aspecto puramente matemático (Teoremas, proposiciones, etc.) o en otras áreas de las ciencias. En el presente capítulo motivamos al lector para que se inmiscuya en el fascinante mundo de la Geometría Fractal.

### 1.1. ¿Cómo nacen los Fractales?

En principio, aunque no se les conocía con ese nombre, los Fractales nacen con la finalidad de contradecir algunas afirmaciones que se consideraban aceptables por los matemáticos de la época. A continuación iremos describiéndolas, teniendo en cuenta su historia.

El descubrimiento del cálculo diferencial independientemente por **Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)** e **Isaac Newton (1643-1727)** entre 1670 y 1677 consituyó uno de los avances más notables en el mundo de las matemáticas, fruto de tal descubrimiento los matemáticos de dicha época creyeron por un tiempo prolongado [1] que:

*...La gráfica de toda función continua posee tangente bien definida en todos sus puntos, salvo quizás en un número finito de ellos...*

Evidentemente la afirmación anterior se aceptó como cierta en principio, inclusive se construyeron algunas demostraciones que la validaban; pero dejaban grandes vacíos en su contenido.

En el año 1834 **Bernard Placidus Johann Gonzal Nepomuk Bolzano (1781-1848)** construyó una función continua en un intervalo que no tiene derivada en ninguno de sus puntos [2]; dicha construcción es de forma iterativa y se procede de la siguiente manera:

*Tome cualquier segmento rectilíneo  $\overline{OQ}$  y ubique el punto medio  $M$  de  $\overline{PQ}$ ; cuadriseque los segmentos  $\overline{OM}$  y  $\overline{MQ}$  con los puntos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  sobre  $\overline{OM}$  y los puntos  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  sobre  $\overline{MP}$ ; considere una recta  $L$  que pase por  $M$  con pendiente diferente a la de  $\overline{PQ}$  y determine los puntos  $P'_3$  y  $Q'_3$  simétricos a  $P_3$  y  $Q_3$  respectivamente respecto de  $L$ . La poligonal formada por los puntos  $P, P'_3, M, Q'_3$  y  $Q$  será llamada **Primera Iteración**. Si repetimos el proceso en cada uno de los cuatro segmentos poligonales y seguimos indefinidamente obtenemos una curva continua y sin derivada en ningún punto.*

Si consideramos el segmento  $\overline{PQ}$  de extremos  $P(0,0)$ ,  $Q(4,2)$  y tomamos la dirección  $\vec{u} = (1,0)$  en cada iteración, obtenemos la siguiente curva:

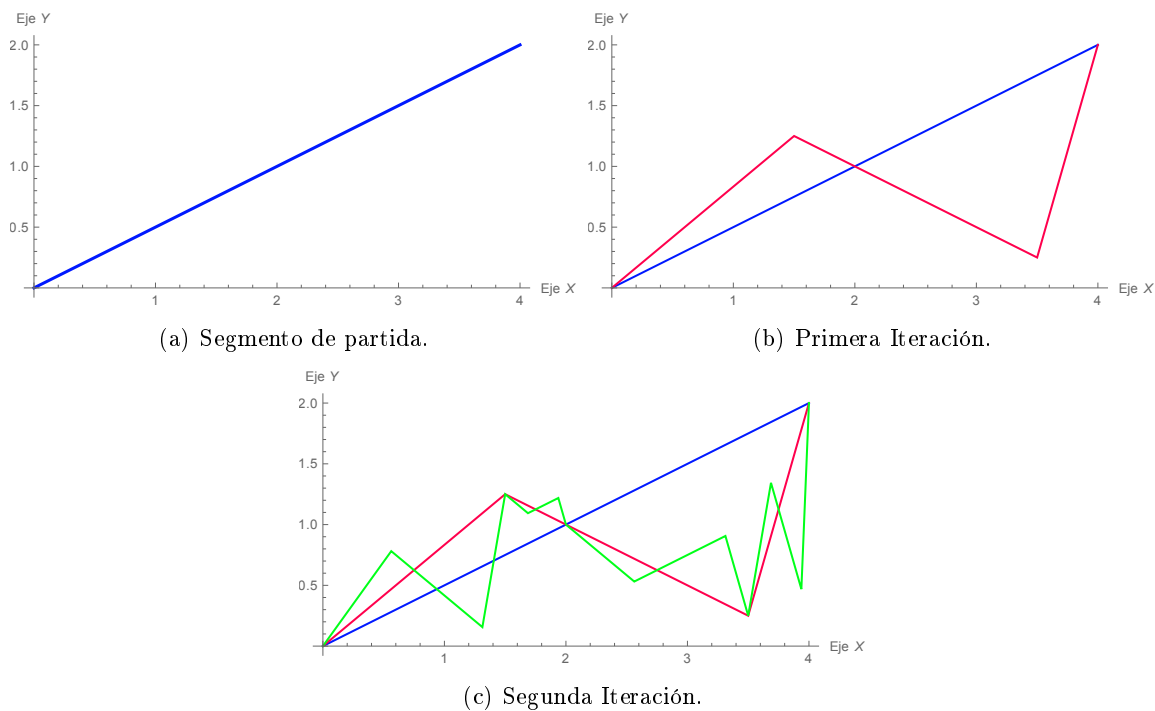


Figura 1.1: Construcción de la Curva de Bolzano.

Claro está que la primera iteración es la poligonal de color rojo, la segunda iteración es la poligonal de color verde y la curva de Bolzano se obtiene en el límite de las poligonales.

Alrededor de cuatro décadas más tarde, en el año 1872 [3], el problema fué resuelto completamente por el gran matemático alemán **Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897)**. Fué el quien convenció a todos de la imposibilidad de la afirmación anterior. El ejemplo de función que propone Weierstrass es muy sencillo y viene dado por la función que justamente hoy en día se denomina **Función de Weierstrass**. La regla de correspondencia para dicha función viene dada por:



$$w(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \sin(\lambda^i t), \quad \lambda > 1, \quad 1 < s < 2$$

La función anterior es continua pero no diferenciable en ninguno de sus puntos. En efecto:

$$\frac{d}{dt}w(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \cos(\lambda^i t) \lambda^i$$

Efectuando las operaciones, se tiene que:

$$\frac{d}{dt}w(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-1)i} \cos(\lambda^i t)$$

La serie anterior es divergente. Por tanto  $\frac{d}{dt}w$  no es finito y en consecuencia  $w$  no es diferenciable.

La gráfica de la función de Weierstrass se aprecia de la siguiente manera:

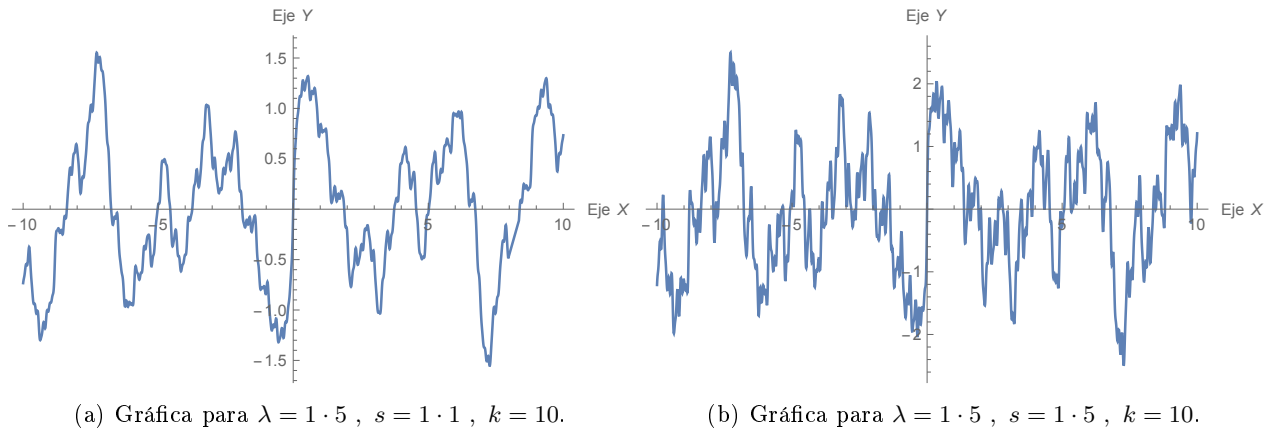


Figura 1.2: Gráfica de la función de Weierstrass.

Vale la pena señalar que en las gráficas anteriores se ha considerado un cierto número de sumandos controlado por un parámetro  $k$  y su generación ha sido posible gracias al software científico Mathematica 10.0.

Para ello se consideran los siguientes pasos:

1. Se define en Mathematica la función de Weierstrass mediante el comando:

$$\text{In}[1]:= \text{w}[\text{t\_}, \text{k\_}, \text{s\_}, \lambda\_] := \sum_{i=1}^k \lambda^{(s-2)*i} \underset{\text{seno}}{\text{Sin}[\lambda^i * \text{t}]}$$

2. Se grafica la función mediante el siguiente comando:

```
In[2]:= Plot[w[t, 1.5, 1.1, 10], {t, -10, 10}, AxesLabel -> {Eje X, Eje Y}
[representación gráfica] [etiqueta de ejes]
```

Bien se puede apreciar en las figuras (1.1-a) y (1.1-b) la continuidad de la función y por supuesto la no diferenciabilidad, pues posee puntas en todos sus puntos y a medida que aumentamos el valor del parámetro  $k$ , la irregularidad se hace más notable. Por ejemplo para  $k = 20$ , la gráfica se aprecia de la siguiente manera:

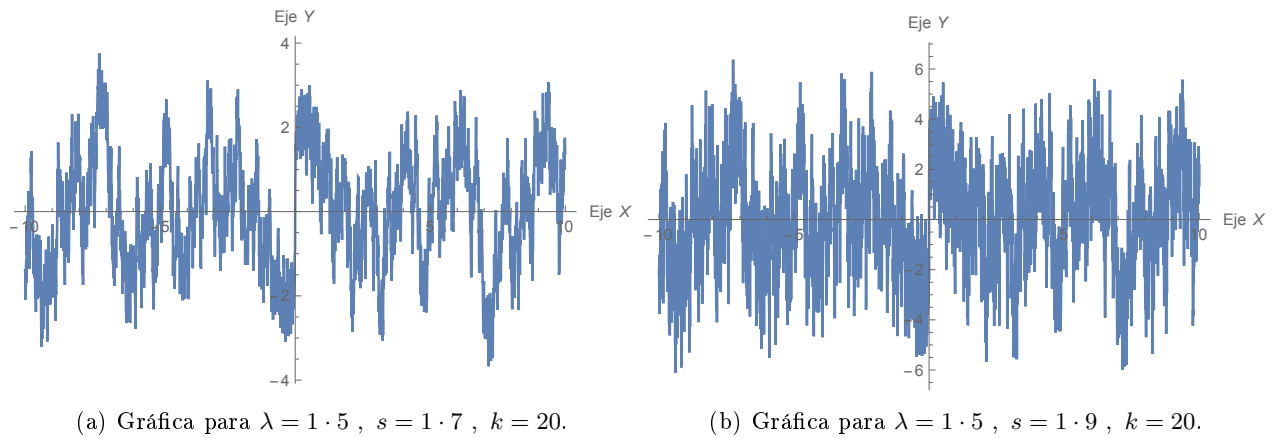


Figura 1.3: Gráfica de la función de Weierstrass.

Asimismo **Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)** propuso en el año 1875 [4] un ejemplo de función continua y sin derivada en ningún punto, parecida a la que propuso Weierstrass. Dicha función tiene por regla de correspondencia a:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 \pi t)}{n^2}$$

La función de Riemann, tiene por gráfica la siguiente:

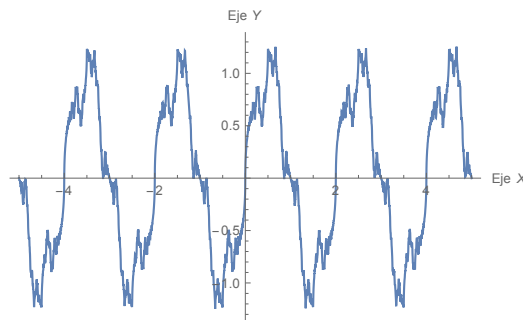


Figura 1.4: Gráfica de la función de Riemann con 500 sumandos.

Separadamente a estas cuestiones, en el año 1833 [5] **Jules Henri Poincaré (1854-1912)** introdujo la noción de dimensión topológica de forma inductiva y de la siguiente manera:

*La dimensión del vacío es “-1”, si la frontera de las vecindades de todos los puntos del objeto tiene dimensión “n-1” entonces el objeto tendrá dimensión “n”.*

A partir de esta definición, no es difícil darse cuenta que:

*La dimensión de un punto es 0, la dimensión de un segmento es 1, la dimensión de un cuadrado es 2, la dimensión de un cubo es 3 y así sucesivamente.*

**Henry John Stephen Smith**, profesor de la Universidad de Oxford publicó en 1875 un artículo denominado “**Sobre la integración de funciones discontinuas**”. En dicho artículo **Smith** desarrolló un método para construir conjuntos densos en ninguna parte [6]. El método se expone de la

siguiente forma:

*...Sea “ $m$ ” cualquier número entero mayor que 2. Divida el intervalo  $[0, 1]$  en “ $m$ ” partes iguales; y extraiga cualquier intervalo excepto el primero o el último. Dividir cada uno de los “ $m - 1$ ” segmentos restantes en “ $m$ ” partes iguales; y vuelva a extraer cualquier subintervalo de las nuevas divisiones excepto el primero o el último. Si se continúa con esta operación ad infinitum, obtendremos un número infinito de puntos sobre el segmento de 0 a 1. Este conjunto de puntos conforma un conjunto denso en ninguna parte...*

Es evidente que los subintervalos que se eliminan deben ser abiertos. Geométricamente para cuando  $m = 4$ , si quitamos el segundo intervalo de cualquier subdivisión, la construcción de Smith se observa de la siguiente manera:



Figura 1.5: Cuarta Iteración del Conjunto de Smith.

Por otro lado, **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)**, notable matemático alemán considerado como la genialidad que revolucionó el mundo de las matemáticas por el carácter abstracto de sus investigaciones, fué quien puso en serios problemas a la definición de dimensión que se concebía hasta ese entonces.

Aunque la intensión de Cantor no era la misma que la de H.J.S.Smith, en una carta enviada a **Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)**, fechada del 05 de noviembre de 1882 cantor le comunicaba lo siguiente [6]:

*...Por lo que puedo ver nuestros números irracionales finitos pueden determinarse de manera relativamente sencilla con la ayuda de números  $\alpha$ ; proseguiré con mis investigaciones al respecto.*

De esta manera cantor observa que si  $a = \alpha_1 \cdot \frac{1}{3} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{3^2} + \cdots + \alpha_n \cdot \frac{1}{3^n} + \cdots$ , donde los  $\alpha_i$  son 0 o 2, entonces “ $a$ ” pertenece al conjunto que se obtiene mediante la siguiente construcción:

*Tome el intervalo  $[0, 1]$ , divídase en tres partes iguales y quite el intervalo medio abierto; hágase lo mismo con los dos segmentos que quedan y continúe indefinidamente. Siguiendo un proceso iterativo “Ad infinitum” se obtiene el insólito conjunto ternario de Cantor.*

Al parecer la idea de Cantor ya había sido adelantada por H.J.S.Smith, inclusive de forma generalizada; esta es una razón para denominar al conjunto de Smith como **Conjunto de Cantor Generalizado**.

Geométricamente al Conjunto de Cantor, se le aprecia de la siguiente manera:



Figura 1.6: Cuarta iteración del Conjunto de Cantor.

Lo que resulta asombroso es que cada punto perteneciente al conjunto anterior al convertirlo a la base 3, solo se escribe con **Ceros** o **dos**. Aquellos puntos que tengan al dígito **Uno** en su escritura en la base 3, es posible ponerlos con ceros y dos, por ejemplo en la etapa 2 el conjunto estará formado por:

$$[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

Luego los puntos  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{7}{9}$  y  $c = 1$  sí o sí pertenecerán al conjunto. Así pues, si tomamos  $b = \frac{7}{9}$ , y lo expresamos en base 3, se tendrá:

$$\frac{7}{9} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3^2} = 2 \cdot \frac{3}{3^2} + 1 \cdot \frac{1}{3^2} = 2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} = 0,21_{(3)}$$

Y como:

$$2 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + \dots = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^{-3}} + \dots = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Entonces:

$$\frac{7}{9} = 2 \cdot 3^{-1} + (2 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + \dots) \cdot 3^{-2} = 2 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + 2 \cdot 3^{-5} + \dots$$

Luego:

$$\frac{7}{9} = 0,2022222222222222222....._{(3)}$$

Por tanto cualquier elemento de la construcción anterior, al convertirlo a la base 3 solo poseerá dígitos ceros o dos.

Ahora bien, de acuerdo a lo que se muestra en la figura (1.5) y teniendo en cuenta la definición clásica de dimensión, Georg Cantor se planteó la siguiente pregunta:

¿Qué dimensión le podría asociar a mi conjunto si empiezo con un segmento de recta

que tiene dimensión Topológica “uno” y ad infinitum sólo se tiene una nube de puntos disconexos a los cuales se les asocia dimensión topológica “cero”?

Para responder a la pregunta anterior, con un poco de sentido común podríamos asociarle una dimensión que esté comprendida entre cero y uno; es decir una *Dimensión fraccionaria*.

Definitivamente la idea clásica de dimensión que se tenía hasta ese entonces, se empobrecía ante tal sorprendente conjunto; tal es así que algunos matemáticos le sugirieron a Georg Cantor que no publicase sus resultados. **Leopoldo Kronecker** fué uno de ellos, por otro lado **H. Poincaré** catalogó a su teoría de los números transfinitos y por ende toda su producción, como una *enfermedad* de la que algún día las matemáticas, llegarían a curarse. He allí el gran problema para la comprensión de la idea de dimensión; quizás todos sabemos que vivimos en un mundo caracterizado por tres dimensiones, pero cuando se nos pide definir la idea de dimensión matemáticamente, nos encontramos en serios problemas.

Los intentos por lograr una definición adecuada para el concepto topológico de curva fueron sucediendo definiciones de grandes matemáticos (entre 1843 y 1882) tales como: Bolzano, Hermann Grassmann, Bernhard Riemann, Georg Cantor y Camille Jordan. La definición que aliviaba las diferentes contradicciones acerca del concepto de curva fué propuesta por **Camille Jordan (1838-1922)** en el año 1882 y a la letra dice lo siguiente [2]:

*Una curva plana  $C$  es una sucesión de puntos representados por las ecuaciones:*

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

*Donde  $f$  y  $g$  son funciones del parámetro  $t$ . Además:*

1. Si  $f$  y  $g$  son continuas, se dice que la curva  $C$  es continua.
2. Si  $f$  y  $g$  tienen un periodo común, la curva  $C$  es cerrada.
3. Si existen  $t \neq t'$ , talque  $f(t) = f'(t)$  y  $g(t) = g'(t)$  y además  $C$  es cerrada, entonces posee puntos múltiples.

Asimismo Jordan propuso el siguiente teorema [2]:

*Toda curva cerrada, simple y continua divide al plano en dos regiones, una exterior y otra interior, de manera que la región interior no puede reducirse a cero, dado que contiene un círculo de radio finito.*

Al parecer Camille Jordan había puesto fin a las controversias acerca del concepto de curva, sin embargo el gran matemático italiano **Giuseppe Peano (1858-1932)** dió una estocada que socababa la definición anterior. Peano construyó en el año 1890 una curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , es decir una curva que llena todo el plano y con ello el famoso teorema de Jordan se desplomaba. Dicha curva se construye de la siguiente manera:

*Dividir el segmento  $[0, 1]$  en tres partes iguales, dibujar un cuadrado en el tercio medio tanto en la parte superior como en la parte inferior y orientar la curva de manera que el recorrido sea en el sentido que se indica en la figura (1.7). La curva estará formada por una poligonal de nueve segmentos*

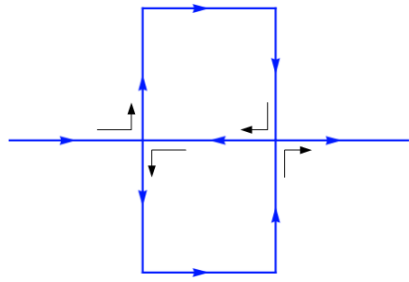


Figura 1.7: Orientación en la Curva de Peano.

*Repetir el paso anterior recursivamente en cada uno de los nueve segmentos. El límite de la curva llena todo el plano*

Geométricamente se le aprecia de la siguiente forma:

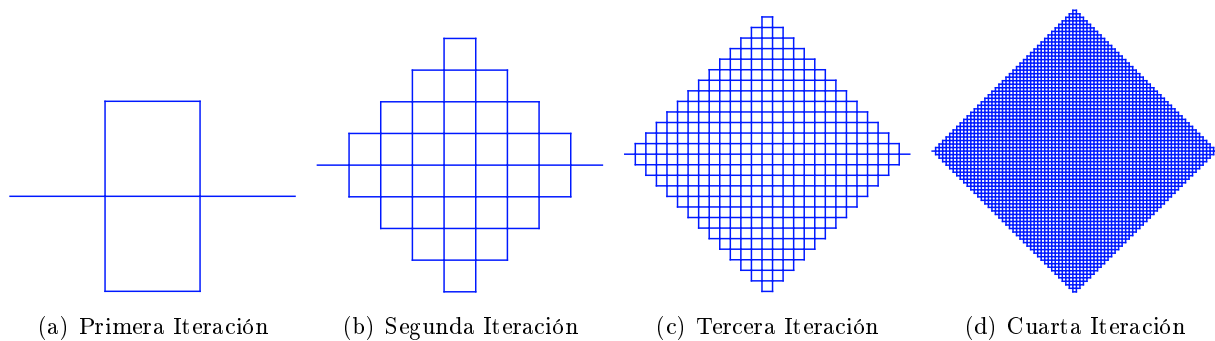


Figura 1.8: La Curva de Peano.

Otra construcción parecida a la de Peano, la ideó el matemático alemán **David Hilbert (1862-1943)** en el año 1891. Dicha construcción se procede de la siguiente forma:

*Dividir un cuadrado en cuatro partes iguales, ubicar los puntos medios de cada uno de los cuatro cuadrados y recorrerlos mediante una poligonal; vuelva a dividir cada uno de los cuadrados en cuatro partes iguales, ubique los puntos medios de cada cuadrado y recórralos de la siguiente manera: Contraiga a la poligonal de la etapa 1 a su mitad, rótelas  $90^\circ$  en sentido horario y ubíquela en los cuatro cuadrados inferiores del lado izquierdo, contraiga en su mitad a la poligonal de la etapa 1, ubíquela en los cuatro cuadrados superiores del lado izquierdo y una ambas poligonales mediante un segmento; refleje la poligonal obtenida anteriormente, en los 8 cuadrados del lado derecho y una ambas poligonales en la parte superior mediante un nuevo segmento. Vuelva a dividir cada cuadrado y repita el proceso indefinidamente. En el límite se obtendrá una curva que recorre todo el plano.*

Geométricamente se aprecia de la siguiente manera:

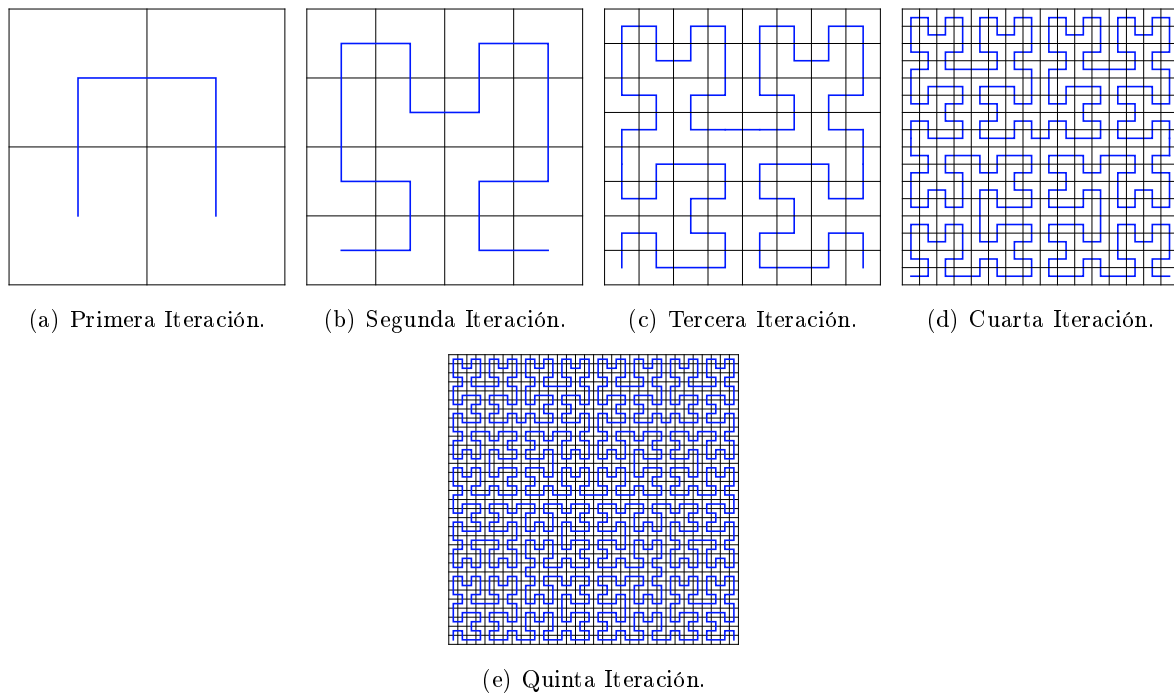


Figura 1.9: Construcción de la Curva de Hilbert.

Una variante de la curva de Hilbert se obtiene al empezar con una poligonal formada como la que se muestra en la figura 1.10 -(a), las imágenes son asombrosas y también se obtiene una curva que llena todo el plano. Gráficamente se observa de la siguiente manera:

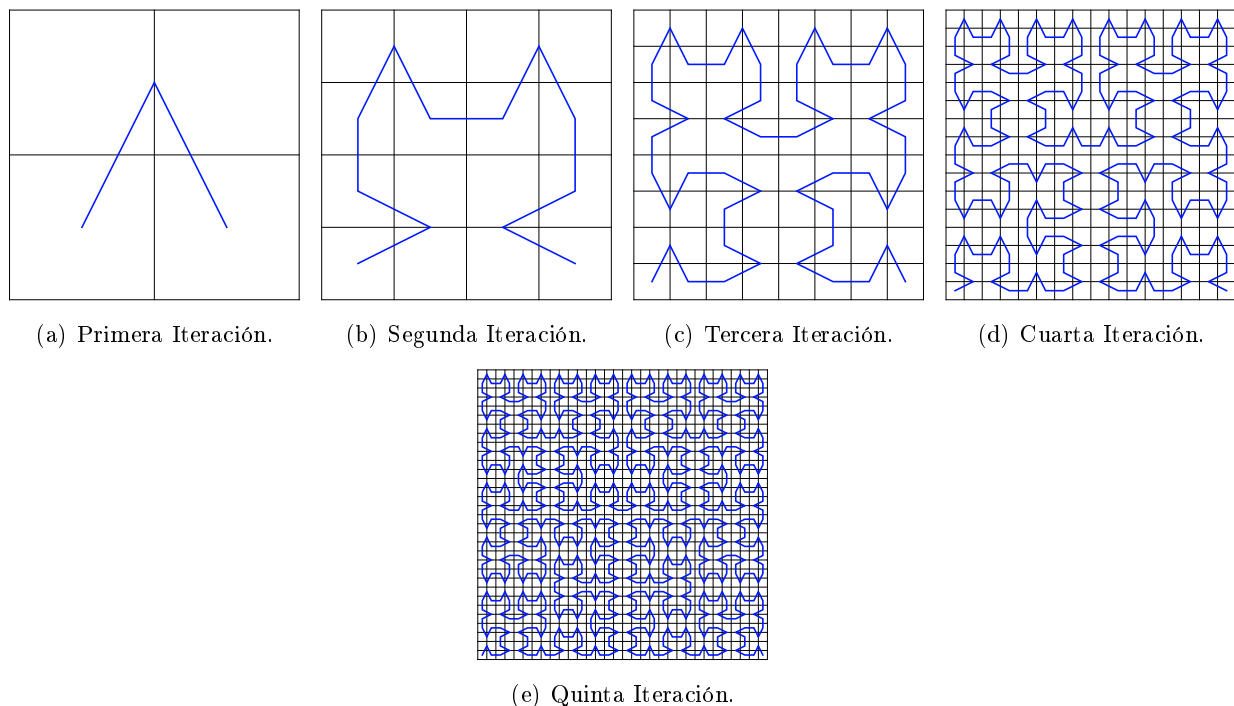


Figura 1.10: Una variante de la Curva de Hilbert.

A pesar de que las ideas de Peano y Hilbert no era exactamente contradecir la idea de dimensión, dichas construcciones al llenar todo el plano, hicieron pensar en curvas de dimensión 2; esto obligó a grandes matemáticos de la época a reestructurar la definición de dimensión, todas ellas apuntando a caracterizar un conjunto en función de su dimensión; siendo la más importante la definición dada por

**Félix Hausdorff** en el año 1919.

Otra de las características importantes que podemos apreciar en todas las gráficas anteriores es la famosa Autosimilaridad; esta peculiaridad significa que si se toma una porción de gráfica del conjunto, esta se observa como una reducción de la gráfica total y fué tomada por renombrados matemáticos para realizar construcciones que preservaran dicha peculiaridad. Entre ellas figuran: La curva de Tagaki, la curva de Koch, El Triángulo de Sierpinski y la Alfombra de Sierpinski. A continuación describimos a cada uno de ellos, con la finalidad de tener una visión mucho más clara del término **“Autosimilaridad”**.

El destacado matemático japonés **Teiji Tagaki (1875-1960)** construyó en el año 1903 una curva que no posee derivada en ninguno de sus puntos [4]; dicha construcción es parecida a la de Carl Weierstrass, dado que posee una regla de correspondencia explícita. Tagaki tomó en lugar de la función periódica  $f(x) = \text{Sen}x$  a la función **“Tienda de Campaña”** en el intervalo  $[0, 1]$ , es decir a la función definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & , x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Extendida por periodicidad en todo  $\mathbb{R}$ .

La gráfica de la función definida anteriormente es la siguiente:

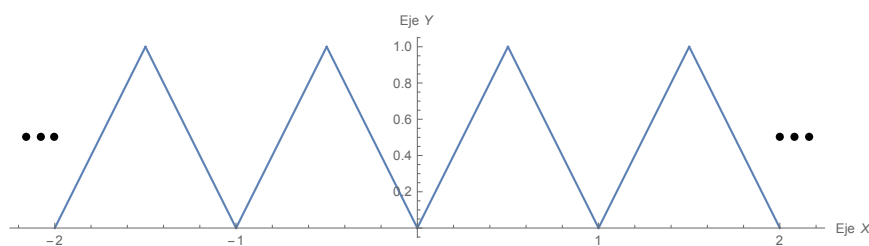


Figura 1.11: Gráfica de la función Tienda de Campaña extendida por periodicidad.

**Tagaki** propuso la siguiente regla de correspondencia:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

Si graficamos la función anterior usando cien sumandos obtenemos:



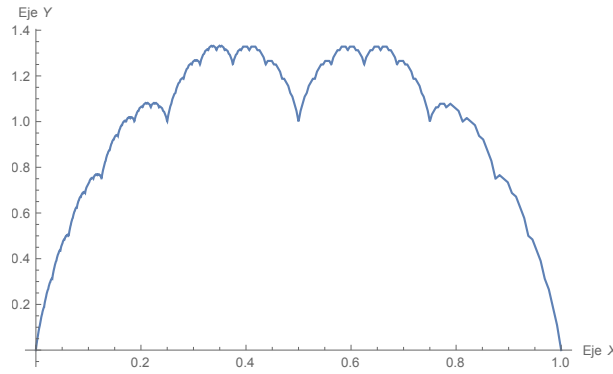


Figura 1.12: Gráfica de la función de Tagaki para cien sumandos.

Queda claro que al usar cien sumandos se debe graficar la función:

$$T(x) = f(x) + \frac{f(2x)}{2} + \frac{f(4x)}{4} + \frac{f(8x)}{8} + \dots + \frac{f(2^{99}x)}{2^{99}}$$

Lo cual es imposible hacerlo sin la ayuda de una herramienta computacional, sin embargo si hacemos uso del álgebra de funciones podemos graficar algunos sumandos y generalizar el comportamiento.

En efecto. Analizaremos el comportamiento, extendiendo la función Tienda de Campaña solo al intervalo  $[0, 2]$ .

Al graficar en un solo sistema las funciones  $f(x)$ ,  $\frac{f(2x)}{2}$ ,  $\frac{f(4x)}{4}$ ,  $f(x) + \frac{f(2x)}{2}$  y  $f(x) + \frac{f(2x)}{2} + \frac{f(4x)}{4}$ , resulta:

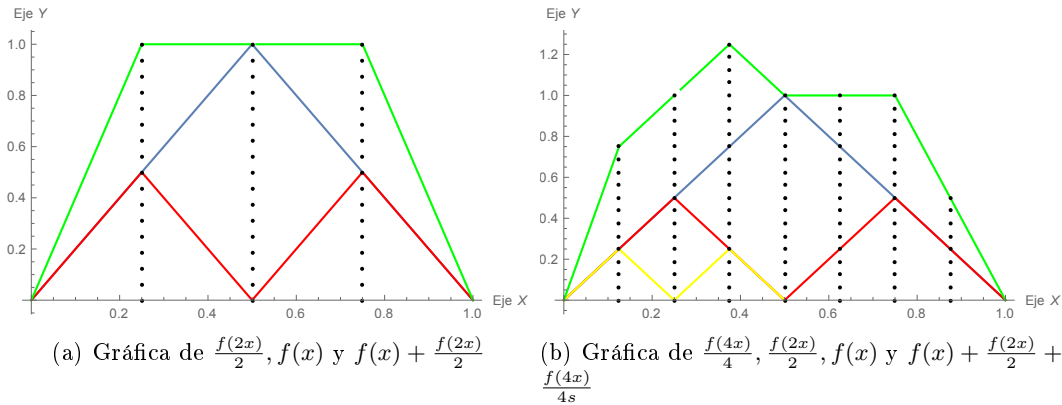


Figura 1.13: Gráfica de la función de Tagaki para dos y tres sumandos.

La gráfica anterior (Figura 1.13 - a) nos indica que al sumar la función de rojo con la función de azul en el intervalo  $[0, \frac{1}{4}]$ , resulta la línea verde de pendiente positiva; en el intervalo  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ , resulta la línea verde horizontal; en el intervalo  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ , también resulta la línea verde horizontal y finalmente en el intervalo  $[\frac{3}{4}, 1]$ , resulta la línea verde de pendiente negativa. De forma análoga ocurre para cuando se toman tres sumandos, con la única diferencia de que los intervalos son de longitud  $\frac{1}{8}$ .

**Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924)**, matemático sueco construyó en 1904 un ejemplo de curva continua que tampoco posee derivada en ninguno de sus puntos, denominada **Curva de Von Koch**, dicha construcción es como sigue:

*Tome un segmento de longitud uno y divídalo en tres partes iguales, dibuje un triángulo equilátero con base en el tercio medio y elimine la base. Aplique el paso anterior recursivamente en cada uno de los cuatro segmentos que se forman. En el límite se obtendrá una curva de longitud infinita, sin derivada en ninguno de sus puntos.*

Geométricamente se observa de la siguiente manera:

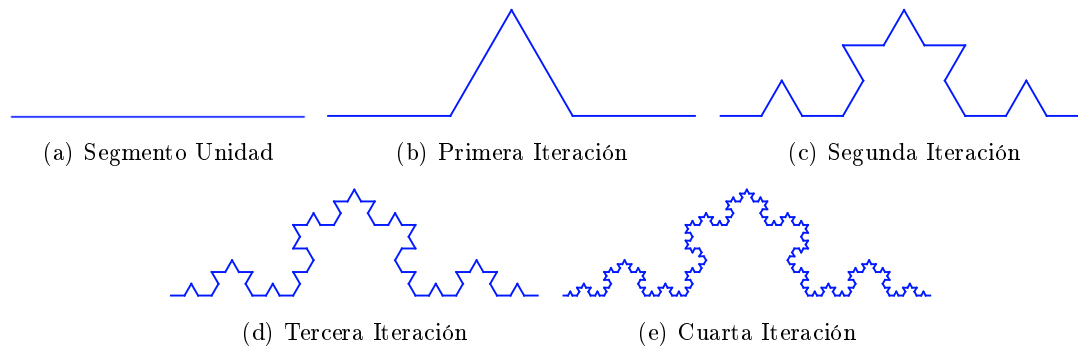


Figura 1.14: La Curva de Von Koch.

Siguiendo un proceso parecido a la construcción anterior, Helge von Koch construyó una curva cerrada denominada hoy en día **El Copo de Nieve**, dicha curva también posee la propiedad de ser continua, autosemejante y no diferenciable. En este caso se parte de un triángulo equilátero, dividimos cada lado en tres partes iguales, dibujamos un triángulo equilátero en el tercio medio y extraemos la base. Siguiendo el mismo proceso *ad infinitum*, se obtiene el famoso copo de nieve; el mismo que geométricamente se le puede apreciar de la siguiente manera:

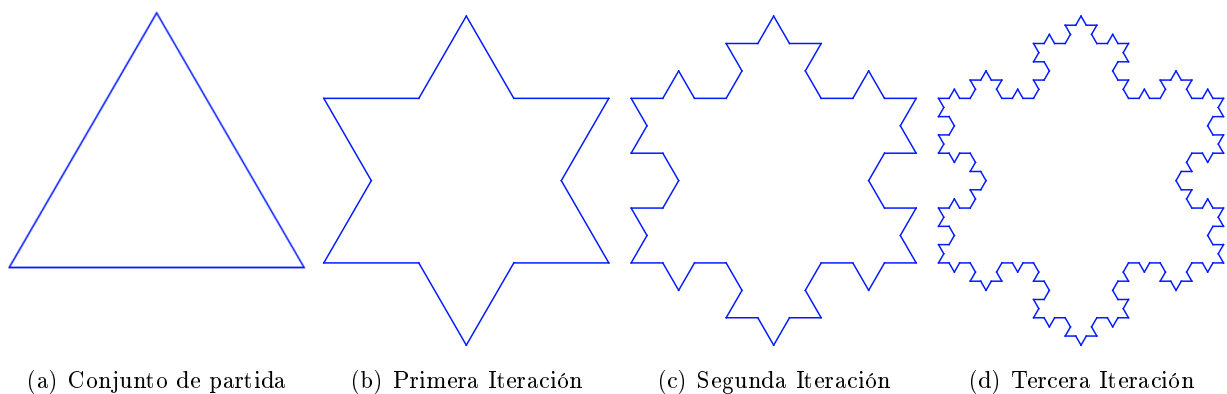


Figura 1.15: El Copo de Nieve de Von Koch.

Por otro lado en el año 1916, el matemático Polaco **WACLAW FRANCISZEK SIERPINSKI (1882-1969)**, introdujo un conjunto muy importante al que hoy en día se le denomina “**La Alfombra de Sierpinski**”. Dicho conjunto se construye de la siguiente manera:

*Tomar el cuadrado unidad  $[0, 1] \times [0, 1]$ , dividir dicho cuadrado en nueve partes iguales y quitar el cuadrado central. Aplique el paso anterior recursivamente en cada uno de los ocho cuadrados restantes y continúe indefinidamente.*

Su gráfica se aprecia de la siguiente manera:

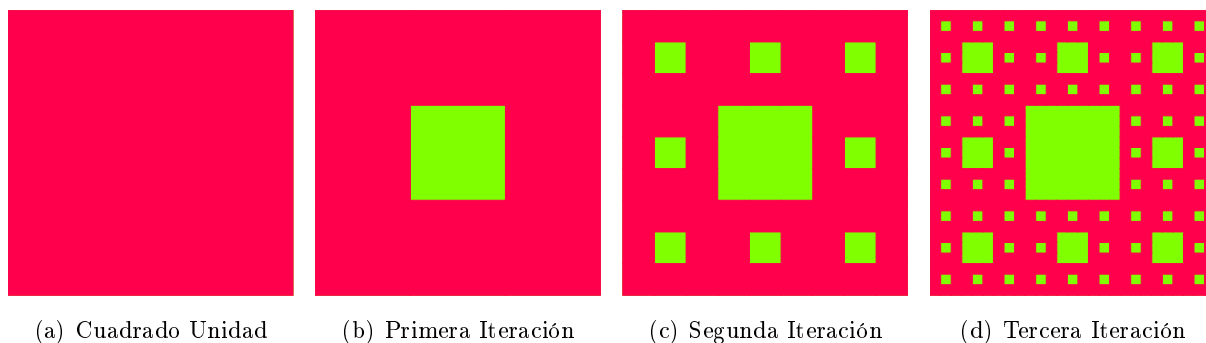


Figura 1.16: La Alfombra de Sierpinski.

Asimismo en el año 1919, el mismo **SIERPINSKI** construyó el conjunto denominado hoy en día “**El Triángulo de Sierpinski**”. El algoritmo de formación para el triángulo de Sierpinski, es el siguiente:

*Tomar un triángulo equilátero, ubique los puntos medios de cada lado y extraiga el triángulo central que resulta de unir los puntos medios. Aplique el paso anterior recursivamente en cada uno de los tres triángulos que quedan y continúe indefinidamente.*

Dicha construcción se aprecia de la siguiente forma:

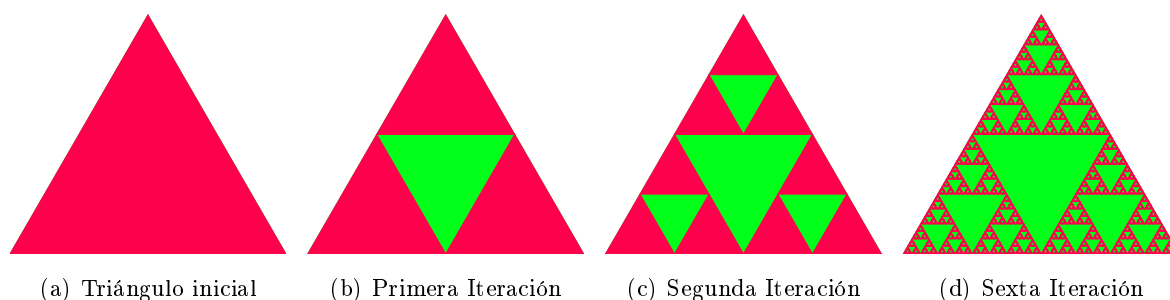


Figura 1.17: El Triángulo de Sierpinski.

A partir de estas ideas surgieron muchos conjuntos que presentan la idea de autosimilaridad e irregularidad (en el caso de las curvas), en principio fueron denominados “**Monstruos Matemáticos**” y quedaron en el olvido como simples curiosidades matemáticas y no fué si no hasta el año 1975 en que el genial matemático francés de origen polaco **Benoit Mandelbrot (1924-2010)**, les denominó **Fractales**.

El término Fractal, proviene del latín **Fractus** y significa irregular, roto, fragmentado, con esquinas, por la naturaleza de su construcción. Hoy en día su estudio ha despertado el interés de muchos científicos y ha generado una nueva rama relativamente nueva de las matemáticas denominada **Geometría Fractal**.

El gran problema que surge inmediatamente es el siguiente: **¿Cómo garantizamos su existencia?**, **¿Como saber si su construcción está bien definida?**, para ello es necesario recordar algunos conceptos del Análisis Matemático, la Topología y la Teoría de la Medida.

## 1.2. Elementos de Análisis y Topología

En la presente sección recordaremos algunos conceptos y resultados básicos del análisis y topología con la finalidad de demostrar rigurosamente la existencia de Conjuntos Fractales.

**Definición. 1.2.1 – Métrica.** Sea  $X$  un conjunto diferente del vacío, la función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada una métrica en  $X$ , si verifica las siguientes propiedades:

$$1. d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y, \forall x, y \in X$$

$$2. d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$$

$$3. d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$$

Al par  $(X, d)$  se le llama Espacio métrico. Son ejemplos de métricas las siguientes:

■ **Ejemplo. 1.1** La métrica Euclideana en  $\mathbb{R}^n$ , definida mediante  $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ , donde  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ .

■ **Ejemplo. 1.2** La métrica del máximo en  $\mathbb{R}^n$ , definida mediante  $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$ , donde  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ .

■ **Ejemplo. 1.3** La métrica de la suma en  $\mathbb{R}^n$ , definida mediante  $d(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$ , donde  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ .

■ **Ejemplo. 1.4** Considere un conjunto  $X \neq \emptyset$  y defínase la función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mediante:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{Si } x = y \\ 1, & \text{Si } x \neq y \end{cases}$$

La función “ $d$ ” así definida verifica las propiedades de una métrica.

**Definición. 1.2.2 – Distancia entre un Punto y un Conjunto.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. A la distancia del punto  $x \in X$  al conjunto  $A \subset X$ , la denotamos y la definimos de la siguiente manera:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

■ **Ejemplo. 1.5** En  $\mathbb{R}$  con la métrica euclídea la distancia del punto  $x = 3$  al conjunto  $A = [-2, -1]$  es:

$$d(3, [-2, 0]) = 4$$

■ **Ejemplo. 1.6** En  $\mathbb{R}^2$  con la métrica euclídea la distancia del punto  $(1, 6)$  al conjunto  $A$ , definido mediante  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1\}$  es:

$$d((1, 6), A) = \frac{|1 - 6 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

■ **Ejemplo. 1.7** Considere la métrica de la suma en  $\mathbb{R}^2$  y el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ . La distancia del punto  $(4, 1)$  al conjunto  $A$  se determinará encontrando el mínimo de la función:

$$f(x, y) = |x - 4| + |y - 1|$$

Sujeta a  $x^2 + y^2 = 4$ , o bien calculando el mínimo de la función  $f(x) = |x - 4| + |\sqrt{4 - x^2} - 1|$ . Luego  $d((1, 4), A) = \sqrt{3}$ .

**Definición. 1.2.3 – Diámetro de un Conjunto.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Al diámetro del conjunto  $A \subset X$ , lo denotamos y lo definimos de la siguiente manera:

$$|A| = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

■ **Ejemplo. 1.8** En  $\mathbb{R}^2$ , con la métrica euclídea. El diámetro del conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 + y^2 \leq 9\}$  es 6.

■ **Ejemplo. 1.9** En  $\mathbb{R}^2$ , con la métrica euclídea. El diámetro del conjunto  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 9 \wedge 1 \leq y \leq 4\}$  es  $\sqrt{58}$ .

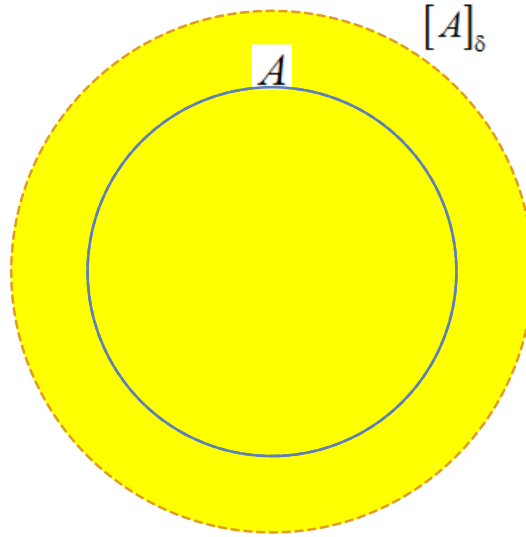
■ **Ejemplo. 1.10** Para el ejemplo anterior, si utilizáramos la métrica del máximo. El diámetro del conjunto  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 9 \wedge 1 \leq y \leq 4\}$  será:

$$\max\{|9 - 2|, |4 - 1|\} = 7$$

**Definición. 1.2.4 –  $\delta$ -Vecindad de un conjunto.** Sea  $A$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$  y  $\delta$  un número real mayor que cero. A la  $\delta$  vecindad del conjunto  $A$ , se le denota y se le define de la siguiente manera:

$$[A]_\delta = \{x \in X : d(x, A) < \delta\}$$

Geométricamente se puede apreciar de la siguiente manera:

Figura 1.18:  $\delta$ -Vecindad o engordado de un conjunto  $A$ .

**Observación 1.1** A la  $\delta$ -vecindad de un conjunto  $A$ , también se le suele llamar el **Engordado** de  $A$ .

■ **Ejemplo. 1.11** La  $\delta$ -vecindad del conjunto  $A = [4, 7)$  será  $[A]_\delta = \langle 4 - \delta, 7 + \delta \rangle$ .

■ **Ejemplo. 1.12** La  $\delta$ -vecindad del conjunto  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$  será:

$$[B]_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < (2 + \delta)^2\}$$

**Definición. 1.2.5 – Sucesión Convergente.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $X$ . Decimos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge al punto  $x$ , si  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , talque  $\forall n > n_0$ , se tiene:

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

■ **Ejemplo. 1.13** La sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  definida mediante  $x_n = \frac{1}{n}$  converge al punto 0.

■ **Ejemplo. 1.14** La sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  definida mediante  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  converge al punto  $e$ .

**Definición. 1.2.6 – Sucesión de Cauchy.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $X$ . Decimos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, si  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , talque  $\forall m, n > n_0$ , se tiene:

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

■ **Ejemplo. 1.15** La sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ , definida mediante  $x_1 = 1, x_2 = 1 \cdot 7, x_3 = 1 \cdot 73, x_4 = 1 \cdot 732, x_5 = 1 \cdot 7320, \dots$  es una sucesión de Cauchy.

■ **Ejemplo. 1.16** La sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , definida mediante  $x_1 = 1, x_2 = 1 \cdot 4, x_3 = 1 \cdot 41, x_4 = 1 \cdot 414, x_5 = 1 \cdot 4142, \dots$  es una sucesión de Cauchy.

**Definición. 1.2.7 – Espacio Métrico Completo.** Un espacio métrico  $(X, d)$  es llamado completo si para

toda sucesión de Cauchy  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ , dicha sucesión converge a un elemento dentro de  $X$ .

■ **Ejemplo. 1.17** El espacio métrico  $(\mathbb{Q}, d)$  con  $d$  como la métrica Euclídea no es completo, pues la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ , definida mediante  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1 \cdot 7$ ,  $x_3 = 1 \cdot 73$ ,  $x_4 = 1 \cdot 732$ ,  $x_5 = 1 \cdot 7320$ , ... es una sucesión de Cauchy que converge al punto  $x = \sqrt{3}$  el cual no pertenece a  $\mathbb{Q}$ .

■ **Ejemplo. 1.18** El espacio métrico  $(\mathbb{R}^n, d)$ , donde  $d$  es la métrica Euclídea es un espacio métrico completo, pues en  $\mathbb{R}^n$  toda sucesión de Cauchy es convergente.

**Definición. 1.2.8 – Topología.** Sea  $X$  un conjunto diferente del vacío, la familia  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  es llamada una topología para  $X$ , si verifica las siguientes propiedades:

1.  $\emptyset, X \in \tau$

2. La unión arbitraria de conjuntos de  $\tau$  está en  $\tau$ ; es decir si  $A_1, A_2, \dots \in \tau$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$

3. La intersección finita de conjuntos de  $\tau$  está en  $\tau$ ; es decir si  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$

Al par  $(X, \tau)$ , le llamaremos Espacio Topológico y a los elementos de  $\tau$  les llamaremos **abiertos**.

■ **Ejemplo. 1.19** Si  $X \neq \emptyset$ , la familia  $\{\emptyset, X\}$ , define una topología para  $X$ , denominada **topología discreta**.

■ **Ejemplo. 1.20** Dado el conjunto  $X = \{1, 2, 3\}$  la familia  $\tau = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X, \emptyset\}$  define una topología para  $X$ .

■ **Ejemplo. 1.21** La familia formada por todos los abiertos de  $\mathbb{R}^n$  que se generan a partir de la métrica euclídea define una topología para  $\mathbb{R}^n$  y se le denomina **Topología usual**.

■ **Ejemplo. 1.22** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico la familia formada por todos los abiertos que se generan a partir de la métrica define una topología para  $X$ .

**Definición. 1.2.9 – Recubrimiento abierto.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $A \subset X$  y  $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una familia de abiertos. La familia  $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es llamada un recubrimiento abierto de  $A$ , si se verifica que  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$

**Definición. 1.2.10 – Compacidad.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $A \subset X$ .  $A$  es llamado conjunto compacto si todo recubrimiento por abiertos de  $A$  es reducible a un recubrimiento finito. Es decir si  $\forall \{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , tal que  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ , existen  $i_1, i_2, \dots, i_m$  tal que  $A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$

■ **Ejemplo. 1.23** El conjunto  $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  es un conjunto compacto.

■ **Ejemplo. 1.24** El conjunto  $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  es compacto.

**Observación 1.2** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, al conjunto formado por todos los subconjuntos compactos de  $X$ , lo denotaremos y lo definiremos de la siguiente forma:

$$\mathfrak{h}(X) = \{A \subset X : A \text{ es compacto}\}$$

Aunque no estamos familiarizados con el concepto de límite superior e inferior, sin embargo es muy importante en el análisis del comportamiento de ciertas funciones. A continuación describimos brevemente el propósito de esta definición.

Considere una función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  si observamos el comportamiento de  $f$  en las inmediaciones de  $x = 0$ , se presentan dos casos:

Si  $f(x)$  crece a medida que  $x$  decrece entonces el límite puede ser finito o  $\infty$  como se muestra en la figura:

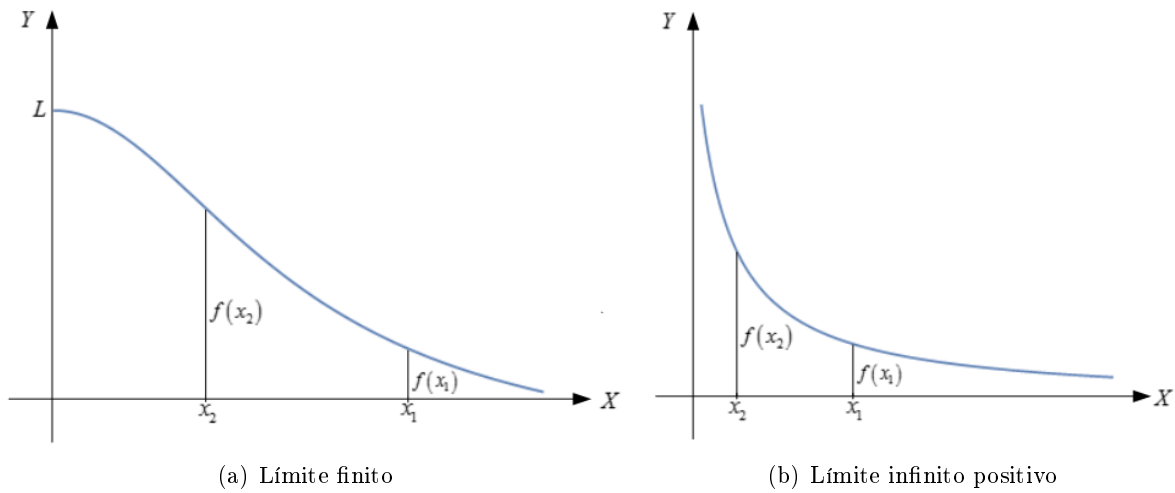


Figura 1.19:  $f(x)$  crece a medida que  $x$  decrece.

En el caso en que  $f(x)$  decrece a medida que  $x$  decrece, entonces el límite puede ser finito o  $-\infty$

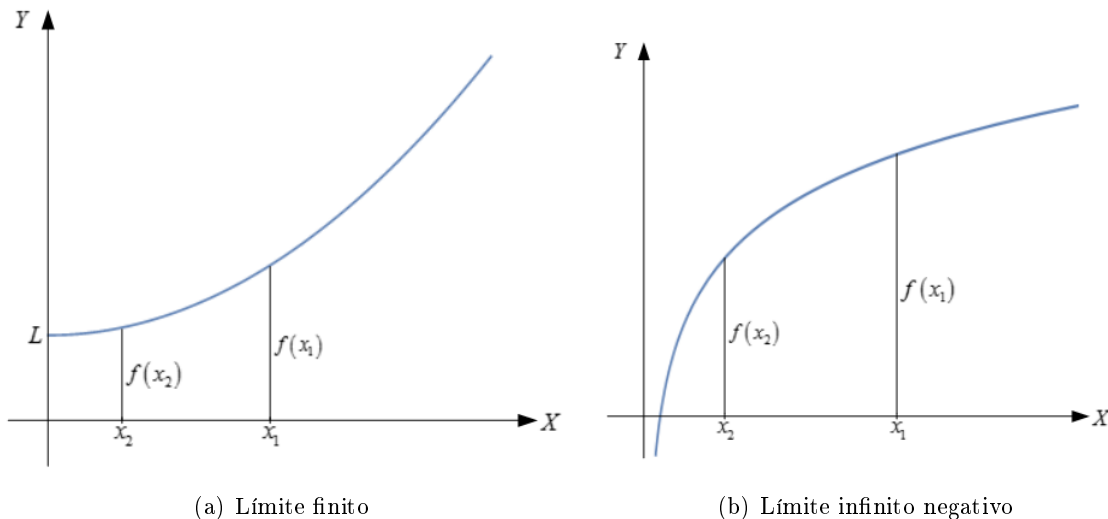


Figura 1.20:  $f(x)$  decrece a medida que  $x$  decrece.



Sin embargo existen funciones que tienen un comportamiento caótico en la inmediaciones del 0; tal es el caso de la función  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  cuyo comportamiento se ilustra a continuación:

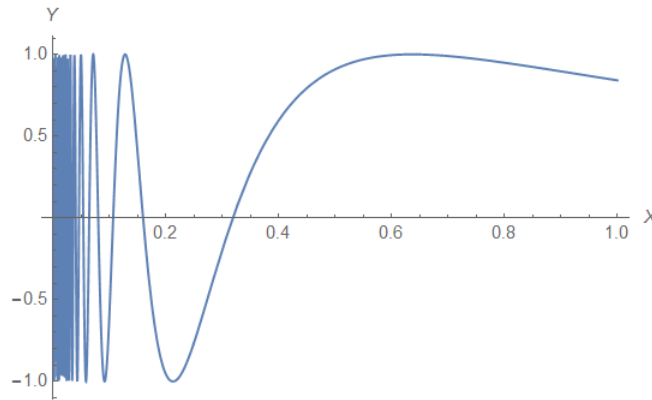


Figura 1.21: Comportamiento de la función  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

En este caso el límite cuando  $x \rightarrow 0$  no existe, además la gráfica fluctúa incontrolablemente que es imposible observar el comportamiento de  $f$ . Este comportamiento **fluctuante** puede describirse en términos de límite superior e inferior y se le define de la siguiente manera:

**Definición. 1.2.11 – Límite inferior y superior de una función.** . Falconer, Kenneth (Pag. 9) Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotamos y definimos al límite inferior y superior cuando  $x$  tiende a cero de la siguiente manera:

$$\liminf_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (\inf\{f(x) : 0 < x < h\})$$

$$\limsup_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sup\{f(x) : 0 < x < h\})$$

Es evidente que  $\liminf_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow 0} f(x)$  y cuando  $\liminf_{x \rightarrow 0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow 0} f(x)$ , el valor común corresponde a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

■ **Ejemplo. 1.25** Considere  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Observemos que  $\inf\{f(x) : 0 < x < h\}$  cuando  $h \rightarrow 0$  corresponde a una sucesión. Esto es para  $h = 1, h = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{6}, h = \frac{1}{8}, \dots$  y como  $f$  es decreciente se tiene la sucesión  $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{16}{17}, \frac{36}{37}, \frac{64}{65}, \dots$ , la cual converge a 1.

Por otro lado para los mismos valores de  $h$ , se genera la sucesión constante  $1, 1, 1, \dots$  correspondiente a los valores de  $\sup\{f(x) : 0 < x < h\}$  que también converge a 1.

■ **Ejemplo. 1.26** Para  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , se tiene que:

$$\liminf_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \inf\left\{\sin\left(\frac{1}{x}\right) : 0 < x < h\right\} \right) = -1$$

$$\limsup_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sup\left\{\sin\left(\frac{1}{x}\right) : 0 < x < h\right\} \right) = 1$$

**Definición. 1.2.12 – Límite superior e inferior de una sucesión de conjuntos.** Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos a los límites superior e inferior los denotamos y los definimos respectivamente de la siguiente

forma:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

■ **Ejemplo. 1.27** Si  $A_n = \langle \frac{1}{n}, 2 + (-1)^n \rangle$ . Entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \langle 0, 3 \rangle, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \langle 0, 1 \rangle$$

■ **Ejemplo. 1.28** Si  $A_n = \begin{cases} [-1, \frac{1}{n}], & n \text{ impar} \\ [-\frac{1}{n}, 1], & n \text{ par} \end{cases}$

Entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = [-1, 1], \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{0\}$$

**Definición. 1.2.13** Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos, diremos que  $A_n$  es convergente cuando se verifique que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  y escribiremos  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

**Proposición 1.1** Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , es una sucesión de conjuntos monótona,  $A_n$  es convergente y:

1. Si  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  y escribiremos  $A_n \uparrow A$ .
2. Si  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  y escribiremos  $A_n \downarrow A$ .

**Demostración.**

1. Si  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ , entonces:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Por tanto:

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Por otro lado:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots = A_1$$

$$A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \dots = A_2$$

Así pues:

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$$

Luego:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ y } \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\text{Por consiguiente } \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

$$\text{Por tanto: } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

2. De forma análoga:

Si  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ , se tiene:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots = A_1$$

$$A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_4 \cup \dots = A_2$$

Así pues:

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$$

Por otro lado

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_4 \cap \dots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

Entonces:

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

De esta manera:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ y } \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\text{Así pues: } \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Por tanto:  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

■ **Ejemplo. 1.29** Considere la sucesión  $A_n = [-\frac{1}{n}, 0]$ . Entonces:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots = [-1, 0]$$

$$A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots = [-\frac{1}{2}, 0]$$

$$A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots = [-\frac{1}{3}, 0]$$

Luego:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} = [-1, 0] \cap [-\frac{1}{2}, 0] \cap [-\frac{1}{3}, 0] \cap \dots = \{0\}$$

Analogamente:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots = \{0\}$$

$$A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots = \{0\}$$

$$A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \dots = \{0\}$$

Por tanto:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} = \{0\} \cup \{0\} \cup \{0\} \cup \dots = \{0\}$$

De esta manera  $A_n = [-\frac{1}{n}, 0]$  es convergente y su punto de convergencia es el conjunto unitario  $A = \{0\}$

### 1.3. Transformaciones Contractivas en el plano

Las aplicaciones contractivas merecen una atención especial dentro de la Geometría Fractal, pues a partir de ellas Sthefan Banach (1892 - 1945) formuló un teorema muy importante denominado **El teorema del punto fijo de Banach** (en honor a su apellido) el cual es muy importante en la construcción de Conjuntos Fractales.

**Definición. 1.3.1 – Contracción.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $T : X \rightarrow X$  un operador. Decimos que  $T$  es un operador contractivo, si existe una constante  $k \in \langle 0, 1 \rangle$  para la cual se verifica que:

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in X$$

**Observación 1.3** Geometricamente significa que las imágenes de dos puntos bajo la contracción se encuentran más cerca que los puntos originales.

Son ejemplos de operadores contractivos los siguientes:

■ **Ejemplo. 1.30** Considere el espacio métrico  $(\mathbb{R}, d)$ , donde  $d$  es la métrica euclídea y  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante  $T(x) = \frac{1}{3}x$ , entonces  $T$  es contractiva, pues  $T(1) = \frac{1}{3}$ ,  $T(6) = 2$ , luego:

$$d(T(1), T(6)) \leq \frac{1}{3}d(1, 6)$$

El efecto geométrico se aprecia de la siguiente forma:

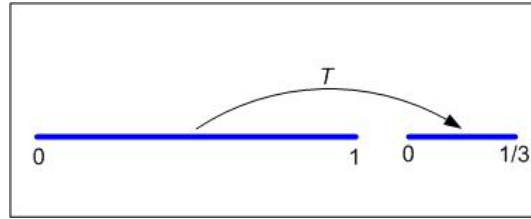


Figura 1.22: Efecto geométrico del operador  $T(x) = \frac{1}{3}x$

■ **Ejemplo. 1.31** Considere el espacio métrico  $(\mathbb{R}^2, d)$ , donde  $d$  es la métrica euclídea y  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida mediante  $T(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ . El efecto geométrico se muestra a continuación:

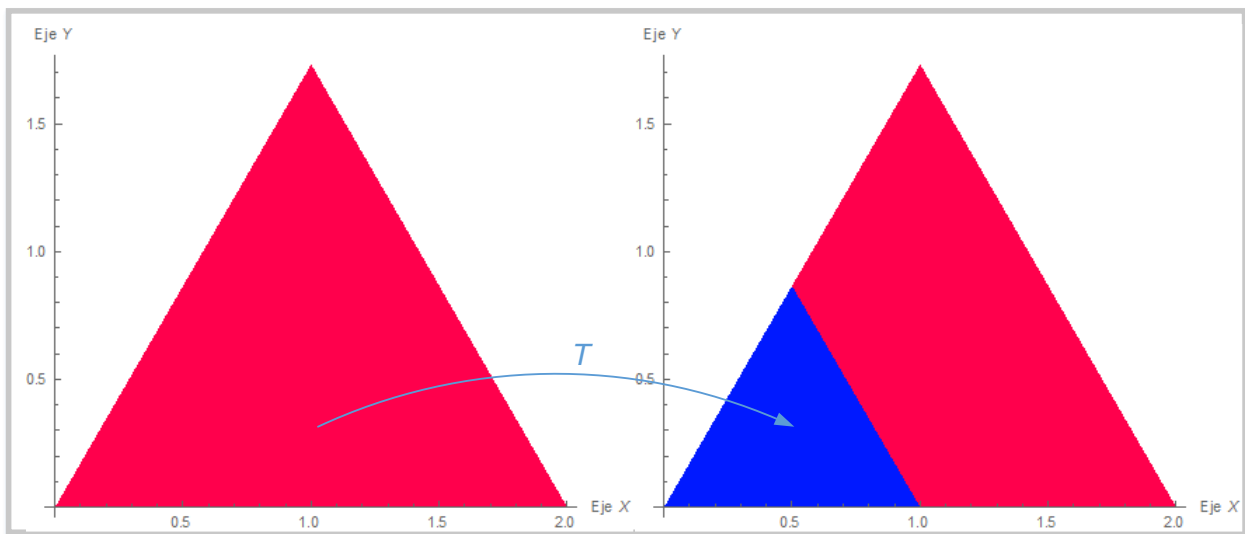


Figura 1.23: Efecto geométrico del operador  $T(x) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$

Un caso de especial interés consiste en averiguar cuando un operador lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $T(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f)$  es un operador contractivo.

Para responder a la inquietud anterior consideraremos los siguientes casos (ver [1]):

**Caso 1.1** Si  $T(x, y) = (ax, by)$

Si hacemos  $u = (x_1, y_1)$  y  $v = (x_2, y_2)$ , se tiene que:

$$\|T(u) - T(v)\| = \|(ax_1, by_1) - (ax_2, by_2)\| = \|(ax_1 - ax_2, by_1 - by_2)\| = \sqrt{a^2(x_1 - x_2)^2 + b^2(y_1 - y_2)^2}$$

Luego escribiendo  $k = \text{Max}\{|a|, |b|\}$ , se tiene que:

$$\|T(u) - T(v)\| \leq k \|u - v\|$$

De esta manera  $T(x, y) = (ax, by)$  será contractiva solo si  $\text{Max}\{|a|, |b|\} \in \langle 0, 1 \rangle$

**Caso 1.2** Si  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$

Haciendo  $u = (x_1, y_1)$  y  $v = (x_2, y_2)$ , se tiene que:

$$\|u - v\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = (u - v)^T (u - v)$$

Luego:

$$\|T(u) - T(v)\|^2 = [T(u) - T(v)]^T [T(u) - T(v)]$$

Haciendo operaciones básicas y aplicando el álgebra de matrices tenemos:

$$\|T(u) - T(v)\|^2 = \begin{pmatrix} a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) & c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) \\ c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2) \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\|T(u) - T(v)\|^2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\|T(u) - T(v)\|^2 = (u - v)^T A^T A (u - v)$$

Donde  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  es la matriz asociada a la transformación  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ .

Ahora bien si  $k$  es la constante de contractividad, se necesita que  $\|T(u) - T(v)\| \leq k\|u - v\|$ , esto implica que:

$$\|T(u) - T(v)\|^2 \leq k^2 \|u - v\|^2 \Rightarrow \frac{\|T(u) - T(v)\|^2}{\|u - v\|^2} \leq k^2$$

Haciendo  $u - v = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ , se tiene que:

$$\frac{\|T(u) - T(v)\|^2}{\|u - v\|^2} = F(r, s) = \frac{\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}}{r^2 + s^2} = \frac{(ar + bs)^2 + (cr + ds)^2}{r^2 + s^2}$$

Con lo cual el objetivo consiste en determinar el punto máximo de la función  $F(r, s) = \frac{(ar + bs)^2 + (cr + ds)^2}{r^2 + s^2}$ .

Con la finalidad de no tener problemas con el denominador, podemos igualar el denominador a 1 y utilizar optimización condicionada, por lo que nuestro problema se reduce a determinar el máximo de la función  $\phi(r, s) = (ar + bs)^2 + (cr + ds)^2$ , sujeta a la restricción  $r^2 + s^2 = 1$ .

Aplicando multiplicadores de Lagrange, se tiene que la función de Lagrange es:

$$L(r, s, \lambda) = (ar + bs)^2 + (cr + ds)^2 + \lambda(1 - r^2 - s^2)$$

Derivando con respecto a  $r$  y  $s$  e igualando a cero tenemos que:

$$\begin{cases} 2(ar + bs)a + 2(cr + ds)c - 2\lambda r = 0 \\ 2(ar + bs)b + 2(cr + ds)d - 2\lambda s = 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{cases} (a^2 + c^2)r + (ab + cd)s = \lambda r \\ (ab + cd)r + (b^2 + d^2)s = \lambda s \end{cases}$$

Luego usando el álgebra de matrices se tiene que:

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad \dots (I)$$

Esto significa que  $\lambda$  es un valor propio de la matriz  $A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$  su respectivo vector propio.

Luego si en (I) multiplicamos en ambos lados por  $\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix}$ , tenemos que:

$$\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda$$

Por tanto el factor de escalamiento será  $k^2 = \lambda$  o bien  $k = \sqrt{|\lambda|}$ .

De esta manera la transformación  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  será una contracción cuando la raíz cuadrada de los valores absolutos de los valores propios de la matriz asociada  $A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sean estrictamente menores que 1.

Para una mejor elección del factor de contractividad se recomienda utilizar la raíz cuadrada del valor absoluto del mayor valor propio.

En el caso en que  $T(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f)$ , no habrá nada que analizar, pues estaremos en el segundo caso, pues  $T(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f) = (ax + by, dx + ey) + (c, f)$  y la traslación  $(c, f)$  no influye en la determinación del factor de contractividad.

■ **Ejemplo. 1.32**  $T(x, y) = (\frac{1}{3}x, -\frac{1}{2}y)$  es una contracción, pues por el caso (1)  $k = \text{Max}\{|\frac{1}{3}|, |-\frac{1}{2}|\} = \frac{1}{2}$ , el cual es menor que 1.

■ **Ejemplo. 1.33**  $T(x, y) = (0.65x + 0.45y, 0.3x - 0.5y)$  es un operador contractivo pues por el caso (2) los valores propios de  $A^T A$  son  $\lambda_1 = 0.628124$ ,  $\lambda_2 = 0.336876$  y  $\sqrt{0.628124} = 0.792543 < 1$ .

## 1.4. Sistemas de Funciones Iteradas

Una forma muy sencilla de generar Conjuntos Fractales, consiste en utilizar una herramienta matemática denominada **Sistemas de Funciones Iteradas (IFS)**, dichos sistemas constan de un conjunto de transformaciones contractivas, las cuales se evalúan iterativamente en un conjunto inicial denominado conjunto semilla. Los IFS son muy importantes en la generación de conjuntos fractales.

**Definición. 1.4.1 – Sistema de Funciones Iteradas (IFS).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Un sistema de funciones iteradas, es una familia finita de contracciones lineales sobre el espacio métrico  $(X, d)$ . A un IFS, lo denotaremos mediante:

$$w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

Donde  $w_i : X \rightarrow X$  es una aplicación contractiva  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ .



**Observación 1.4** Al máximo de las constantes de las  $w_i$ , la denotaremos mediante  $k_{\max}$ . Es decir:

$$k_{\max} = \max\{k_1, \dots, k_n\}$$

A continuación presentamos algunos ejemplos de Conjuntos Fractales Clásicos, utilizando un IFS.

■ **Ejemplo. 1.34 El Conjunto de Cantor en la Recta.**

El algoritmo para generar el conjunto de cantor en la recta es el siguiente:

**Paso 1.** Tomar el intervalo  $[0, 1]$ .

**Paso 2.** Dividir el intervalo en tres partes iguales y quitar el intervalo abierto central.

**Paso 3.** Aplicar el paso anterior recursivamente en cada uno de los intervalos restantes.

Geometricamente se le aprecia de la siguiente manera.

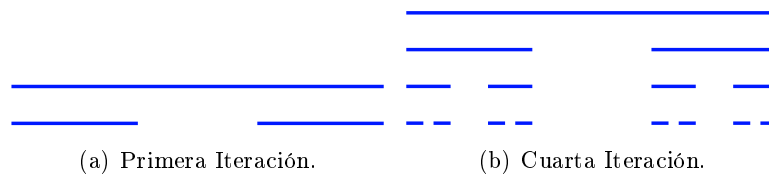


Figura 1.24: El Conjunto Ternario de Cantor.

El IFS para generar el Conjunto de Cantor en la recta, viene dado por:

$$\begin{cases} w_1(x) = \frac{1}{3}x \\ w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$

■ **Ejemplo. 1.35 El Conjunto de Cantor en el Plano.**

El algoritmo para generar el conjunto de cantor en el plano es el siguiente:

**Paso 1.** Tomar el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**Paso 2.** Dividir el cuadrado en nueve partes iguales y quitar tanto el rectángulo central horizontal como el rectángulo central vertical.

**Paso 3.** Aplicar el paso anterior recursivamente en cada uno de los cuatro cuadrados restantes.

Geometricamente se le observa de la siguiente manera:

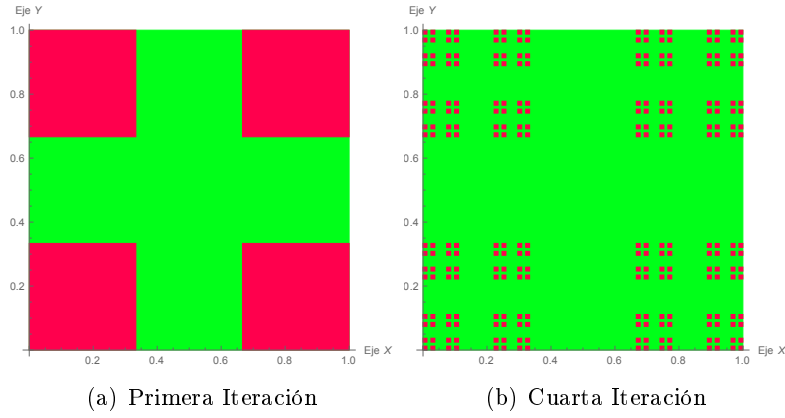


Figura 1.25: El Conjunto de Cantor en el Plano.

El IFS para generar el Conjunto de Cantor en el plano, viene dado por:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) \\ w_2(x, y) = (\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y) \\ w_3(x, y) = (\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}) \\ w_4(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}) \end{cases}$$

■ **Ejemplo. 1.36 El Conjunto de Cantor en el Espacio.**

El algoritmo para generar el conjunto de cantor en el espacio es el siguiente:

**Paso 1.** Tomar el cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Paso 2.** Dividir el cubo en veintisiete cubos iguales y quitar los tres paralelepípedos centrales.

**Paso 3.** Aplicar el paso anterior recursivamente en cada uno de los ocho cubos restantes.

Graficamente se tiene:

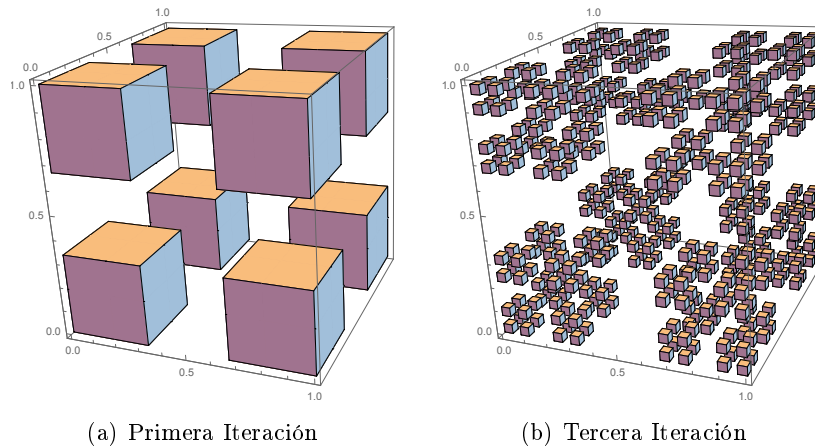


Figura 1.26: El Conjunto de Cantor en el Espacio.

El IFS para generar el Conjunto de Cantor en el Espacio es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) \\ w_2(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, 0, 0) \\ w_3(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0) \\ w_4(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (0, \frac{2}{3}, 0) \\ w_5(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (0, 0, \frac{2}{3}) \\ w_6(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}) \\ w_7(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \\ w_8(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{array} \right.$$

■ **Ejemplo. 1.37** El Triángulo de Sierpinsky.

El algoritmo para generar el Triángulo de Sierpinsky es el siguiente:

**Paso 1.** Tomar un triángulo equilátero.

**Paso 2.** Ubicar los puntos medios de cada lado y extraer el triángulo central que resulta de unir los puntos medios.

**Paso 3.** Aplicar el paso anterior recursivamente en cada uno de los tres triángulos que quedan.

Su gráfica se aprecia de la siguiente forma:

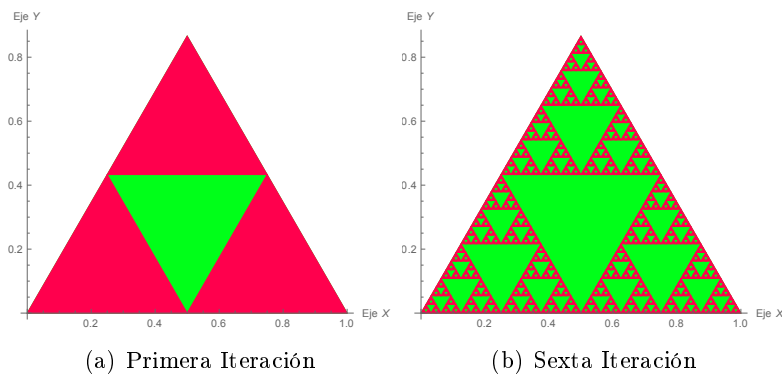


Figura 1.27: El Triángulo de Sierpinski.

El IFS para generar el triángulo de Sierpinsky viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) \\ w_2(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) + (\frac{1}{2}, 0) \\ w_3(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) + (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}) \end{array} \right.$$

■ **Ejemplo. 1.38 La Alfombra de Sierpinsky.**

El algoritmo para generar la Alfombra de Sierpinsky es el siguiente:

**Paso 1.** Tomar el cuadrado unidad  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**Paso 2.** Dividir el cuadrado unidad en nueve partes iguales y quitar el cuadrado central.

**Paso 3.** Aplicar el paso anterior recursivamente en cada uno de los ocho cuadrados restantes.

Su gráfica se aprecia de la siguiente manera:

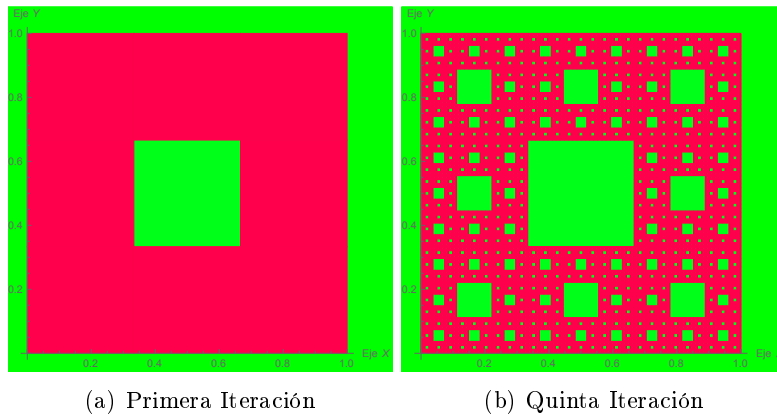


Figura 1.28: La Alfombra de Sierpinski.

El IFS para generar la Alfombra de Sierpinsky viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) \\ w_2(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{1}{3}, 0) \\ w_3(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{2}{3}, 0) \\ w_4(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \\ w_5(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \\ w_6(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ w_7(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (0, \frac{2}{3}) \\ w_8(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (0, \frac{1}{3}) \end{array} \right.$$

■ **Ejemplo. 1.39 La Esponja de Sierpinsky.**

El algoritmo para generar la Esponja de Sierpinsky viene dado por:

**Paso 1.** Tomar el cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Paso 2.** Dividir el cubo en veintisiete cubos iguales y quitar los cubos centrales de cada cara, más el cubo central del cubo original.

**Paso 3.** Aplicar el paso anterior recursivamente en cada uno de los veinte cubos restantes.

Geométricamente se aprecia de la siguiente manera:

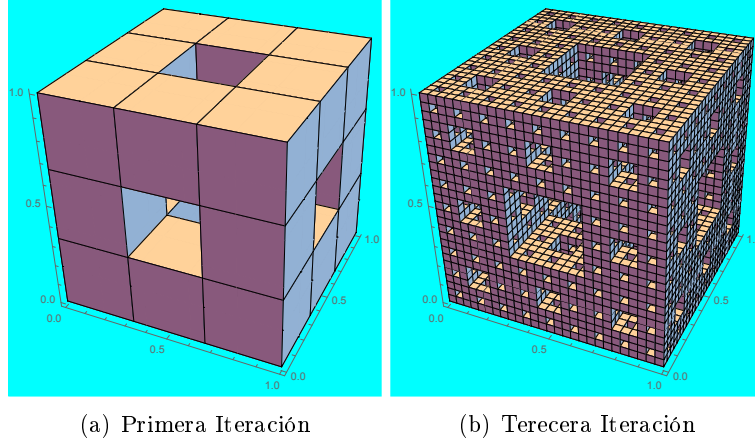


Figura 1.29: La Esponja de Sierpinski.

El IFS para generar la Esponja de Sierpinsky viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) \\ w_2(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{1}{3}, 0, 0) \\ w_3(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, 0, 0) \\ w_4(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0) \\ w_5(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0) \\ w_6(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0) \\ w_7(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (0, \frac{2}{3}, 0) \\ w_8(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (0, \frac{1}{3}, 0) \\ w_9(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (0, 0, \frac{1}{3}) \\ w_{10}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}) \\ w_{11}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \\ w_{12}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \\ w_{13}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (0, 0, \frac{1}{3}) \\ w_{14}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}) \\ w_{15}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}) \\ w_{16}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ w_{17}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} w_{18}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \\ w_{19}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \\ w_{20}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z) + (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

■ **Ejemplo. 1.40 La Curva de Von Koch.**

El algoritmo para generar la Curva de Von Koch es el siguiente:

**Paso 1.** Tomar el segmento  $[0, 1]$ .

**Paso 2.** Dividir el segmento en tres partes iguales, dibujar un triángulo equilátero en el tercio central y quitar la base, quedando una poligonal.

**Paso 3.** Aplicar el paso anterior recursivamente en cada uno de los cuatro segmentos.

Geometricamente se le aprecia de la siguiente forma:

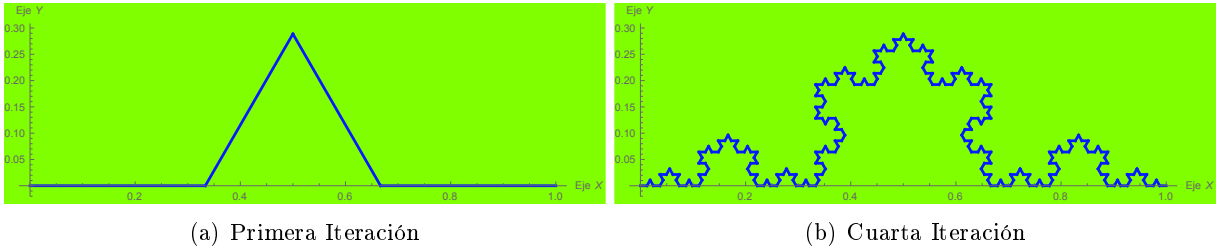


Figura 1.30: La Curva Von Koch.

El IFS para generar La Curva de Von Koch, es el siguiente:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) \\ w_2(x, y) = (\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y) + (\frac{1}{3}, 0) \\ w_3(x, y) = (\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y, -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y) + (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}) \\ w_4(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{2}{3}, 0) \end{cases}$$

■ **Ejemplo. 1.41 La Curva de Peano.**

El algoritmo para generar la Curva de Peano es el siguiente:

**Paso 1.** Tomar el segmento  $[0, 1]$ .

**Paso 2.** Dividir el segmento en tres partes iguales, dibujar un cuadrado en el tercio medio tanto en la parte superior como en la parte inferior y orientar la curva como se indica en la figura. La curva estará formada por una poligonal de nueve segmentos.

**Paso 3.** Aplicar el paso anterior recursivamente en cada uno de los nueve segmentos.

Geométricamente se le aprecia de la siguiente forma:

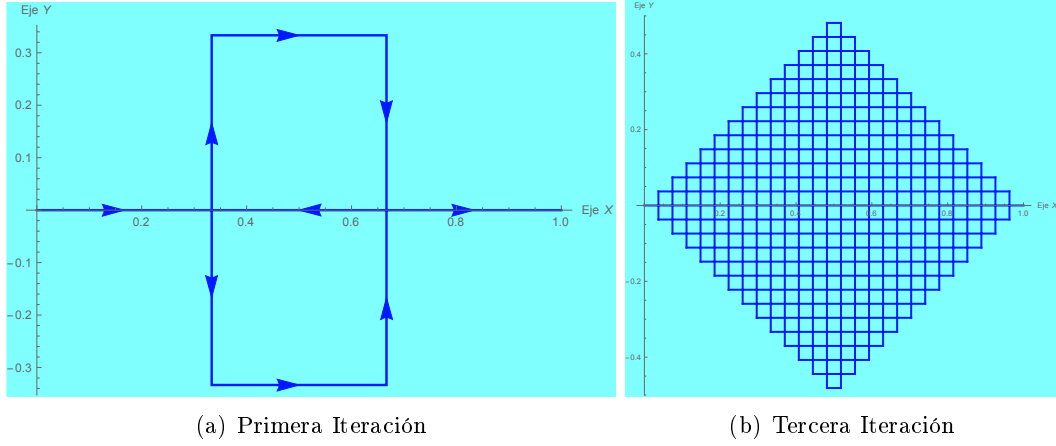


Figura 1.31: La Curva de Peano.

El IFS para generar La Curva de Peano, es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) \\ w_2(x, y) = (-\frac{1}{3}y, \frac{1}{3}x) + (\frac{1}{3}, 0) \\ w_3(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ w_4(x, y) = (\frac{1}{3}y, -\frac{1}{3}x) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \\ w_5(x, y) = (-\frac{1}{3}x, -\frac{1}{3}y) + (\frac{2}{3}, 0) \\ w_6(x, y) = (\frac{1}{3}y, -\frac{1}{3}x) + (\frac{1}{3}, 0) \\ w_7(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \\ w_8(x, y) = (-\frac{1}{3}y, \frac{1}{3}x) + (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \\ w_9(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{2}{3}, 0) \end{array} \right.$$





## Capítulo 2

# Construcción de Conjuntos Fractales Clásicos

### 2.1. Teorema del Punto Fijo

En la presente sesión estudiaremos un teorema muy importante denominado **El Teorema del punto fijo**. Dicho teorema fué formulado y demostrado por Stefan Banach en el año 1922 y garantiza la existencia de un punto fijo a partir de un Operador Contractivo.

**Teorema 2.1.1 – Teorema del punto fijo .** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $T : X \rightarrow X$  un operador contractivo. Si  $(X, d)$  es completo, entonces  $T$  posee un único punto fijo.

#### **Demostración.**

La demostración se desarrollará en dos partes; estas son: Existencia y unicidad.

#### **Existencia.**

Considere cualquier punto  $x_0 \in X$  y la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , definida mediante  $x_1 = x_0, x_n = T(x_{n-1})$ . Como  $T$  es un operador contractivo entonces:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^2d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^nd(x_0, x_1)$$

Luego para  $n > m$ , aplicando la desigualdad triangular se tiene:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

Así pues:

$$d(x_m, x_n) \leq k^md(x_0, x_1) + k^{m+1}d(x_0, x_1) + k^{m+2}d(x_0, x_1) + \dots + k^{n-1}d(x_0, x_1)$$

Luego:

$$d(x_m, x_n) \leq (k^m + k^{m+1} + k^{m+2} + \dots + k^{n-1})d(x_0, x_1)$$

Extrayendo factor común  $k^m$ , se tiene:

$$d(x_m, x_n) \leq k^m(1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-m-1})d(x_0, x_1)$$

Por tanto:

$$d(x_m, x_n) \leq k^m \left( \frac{1 - k^{n-m-1}}{1 - k} \right) d(x_0, x_1)$$

Y como  $1 - k^{n-m-1} < 1$ , tenemos:

$$d(x_m, x_n) < \frac{k^m}{1 - k} d(x_0, x_1)$$

Dado que  $d(x_0, x_1)$  es conocido y  $\frac{k^m}{1-k}$  es un valor muy pequeño, entonces es posible encontrar un  $\epsilon$ , para el cual se verifique que:

$$\frac{k^m}{1 - k} d(x_0, x_1) < \epsilon$$

Luego:

$$d(x_m, x_n) < \frac{k^m}{1 - k} d(x_0, x_1) < \epsilon$$

De esta manera la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy.

Ahora bien como  $X$  es un espacio métrico completo y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy entonces por definición  $x_n$  converge a un punto  $x$  dentro de  $X$ .

Afirmamos que el punto de convergencia  $x$  es el punto fijo del operador  $T$ .

**En efecto.**

$$T(x) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = x$$

Por tanto:

$$T(x) = x$$

**Unicidad.**

Supongamos que existen dos puntos fijos  $x$  y  $x'$  tal que  $x \neq x'$ , entonces:

$$d(x, x') = d(T(x), T(x')) \leq kd(x, x')$$

Y como  $d(x, x') \neq 0$ , se tiene que:

$$d(x, x') \leq kd(x, x') \Rightarrow k \geq 1$$

Lo cual es una contradicción, pues  $k \in (0, 1)$ . Por tanto el punto fijo de  $T$  es único.

■ **Ejemplo. 2.1** El operador  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido mediante  $T(x) = \frac{1}{3}x$ , posee como único punto fijo a  $x = 0$ .

**En efecto.**

Si  $x_0 = 81$ , evaluando iterativamente se tiene:

$$x_1 = T(x_0) = T(81) = \frac{1}{3} \cdot 81 = 27$$

$$x_2 = T(x_1) = T(27) = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9$$

$$x_3 = T(x_2) = T(9) = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

$$x_4 = T(x_3) = T(3) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$x_5 = T(x_4) = T(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Luego la sucesión  $x_n : 81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots$  converge al único punto fijo  $x = 0$ .

■ **Ejemplo. 2.2**  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definido por  $T(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$  tiene como único punto fijo al punto  $(0, 0)$  y para determinarlo podemos empezar en cualquier punto de  $\mathbb{R}^2$ , por ejemplo si empezamos en  $x_0 = (100, 200)$ , tenemos:

$$T(100, 200) = (\frac{1}{2} \cdot 100, \frac{1}{2} \cdot 200) = (50, 100)$$

$$T(50, 100) = (\frac{1}{2} \cdot 50, \frac{1}{2} \cdot 100) = (25, 50)$$

$$T(25, 50) = (\frac{1}{2} \cdot 25, \frac{1}{2} \cdot 50) = (\frac{25}{2}, 25)$$

$$T(\frac{25}{2}, 25) = (\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2}, \frac{1}{2} \cdot 25) = (\frac{25}{4}, \frac{25}{2})$$

Si continuamos evaluando iterativamente apreciamos que ambas sucesiones  $\alpha_n : 100, 50, 25, \frac{25}{2}, \frac{25}{4}, \dots$  y  $\beta_n : 200, 100, 50, 25, \frac{25}{2}, \frac{25}{4}, \dots$  convergen a 0.

Por tanto el punto de convergencia del operador  $T(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$  será  $(0, 0)$  y es el único punto fijo.

## 2.2. La métrica de Hausdorff

Otro de los ingredientes de vital importancia en la construcción de Conjuntos Fractales es una métrica especial denominada **Métrica de Hausdorff**, dicha métrica actúa sobre un espacio cuyos elementos son conjuntos y fué diseñada por el gran matemático Alemán Felix Hausdorff en el año 1919.

**Definición. 2.2.1 – La métrica de Hausdorff..** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de un espacio métrico  $(X, d)$ . A la distancia de Hausdorff entre los conjuntos  $A$  y  $B$ , la denotamos y la definimos de la siguiente manera:

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset [B]_\delta \wedge B \subset [A]_\delta\}$$

En la definición anterior debemos tener algunas consideraciones, dado que:

1. Si uno de los conjuntos  $A$  o  $B$  fuera el conjunto vacío, entonces cualquier  $\delta$ -vecindad del conjunto vacío seguiría siendo el vacío, entonces no habría forma de incluir el otro conjunto. razón por la cual los conjuntos  $A$  y  $B$  deben ser diferentes del vacío.

2. Si por ejemplo  $A = [0, 2]$  y  $B = ]0, 2[$ , entonces:

$$[A]_\delta = ]-\delta, 2 + \delta[, [B]_\delta = ]-\delta, 2 + \delta[$$

Luego:

$$A \subset [B]_\delta \iff [0, 2] \subset ]-\delta, 2 + \delta[ \Rightarrow -\delta < 0 \wedge 2 + \delta > 2 \Rightarrow \delta > 0$$

Análogamente:

$$B \subset [A]_\delta \iff ]0, 2[ \subset ]-\delta, 2 + \delta[ \Rightarrow -\delta \leq 0 \wedge 2 + \delta \geq 2 \Rightarrow \delta \geq 0$$

Luego tomando ínfimo se concluye que  $d_H([0, 2], ]0, 2[) = 0$ , sin embargo  $A$  y  $B$  son diferentes, razón por la cual  $d_H$  no es confiable.

3. Si  $A = [0, 2]$  y  $B = ]0, \infty[$ , entonces las  $\delta$ -vecindades de  $A$  y  $B$  serán respectivamente:

$$[A]_\delta = ]-\delta, 2 + \delta[, [B]_\delta = ]-\delta, \infty[$$

Entonces para que  $B \subset [A]_\delta$ ,  $\delta$  debe ser infinito.

Teniendo en cuenta lo comentado anteriormente debemos exigir que los conjuntos  $A$  y  $B$ , deben ser conjuntos compactos diferentes del vacío. Por tanto  $d_H$ , debe estar definida en el producto cartesiano  $\mathcal{h}(X) \times \mathcal{h}(X)$ . Luego:

$$d_H : \mathcal{h}(X) \times \mathcal{h}(X) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \wedge d_H(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset [B]_\delta \wedge B \subset [A]_\delta\}$$

Con la finalidad de demostrar rigurosamente que la función  $d_H$  define una métrica en el espacio  $\mathcal{h}(\mathbb{R}^n)$ , en primer lugar recordaremos algunos resultados del análisis.

**Proposición 2.1** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $x \in X$ . Si  $A \subset B \subset X$  entonces  $d(x, B) \leq d(x, A)$ .

**Demostración.**

$$d(x, B) < d(x, A) - (|B| - |A|) \text{ y como } |B| - |A| > 0 \text{ entonces } d(x, B) \leq d(x, A).$$

**Proposición 2.2** Si  $A \subset B$ , entonces  $[A]_\delta \subset [B]_\delta$ .

**Demostración.**

Sea  $x \in [A]_\delta \Rightarrow d(x, A) < \delta$  y como  $A \subset B$ , por la proposición anterior se tiene que:

$$d(x, B) \leq d(x, A) < \delta$$

Así pues  $d(x, B) < \delta$  Por tanto  $x \in [B]_\delta$ . Luego:

$$x \in [A]_\delta \Rightarrow x \in [B]_\delta$$

De esta manera  $[A]_\delta \subset [B]_\delta$ .

Finalmente:

$$[[A]_\delta]_\epsilon \subset [A]_{\delta+\epsilon}$$

Dado que:

$$x \in [[A]_\delta]_\epsilon \Rightarrow d(x, [A]_\delta) < \epsilon \Rightarrow d(x, A) < \delta + \epsilon \Rightarrow x \in [A]_{\delta+\epsilon}$$

En base a las proposiciones anteriores podemos probar el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.1**  $d_H : \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  es una métrica.

**Demostración.**

$$1. d_H(A, B) \geq 0, d_H(A, B) = 0 \iff A = B$$

**En efecto.**

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset [B]_\delta \wedge B \subset [A]_\delta\} > 0 \Rightarrow d_H(A, B) > 0.$$

Si  $d_H(A, B) = 0 \Rightarrow \inf\{\delta > 0 : A \subset [B]_\delta \wedge B \subset [A]_\delta\} = 0$ , luego para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que:

$$A \subset [B]_{\frac{1}{n}} \wedge B \subset [A]_{\frac{1}{n}}$$

Así pues si  $x \in A$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists x_n \in B$ , talque  $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$  y cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ , luego  $x_n \rightarrow x$ .

Ahora bien  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$  y  $B$  es compacto, entonces  $x \in B$ . Luego:

$$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subset B$$

Procediendo análogamente para cuando  $x \in B$ , se demuestra que:

$$x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \subset A$$

Por tanto  $d_H(A, B) = 0$ , implica que  $A = B$ .

2. Para la simetría, se tiene que:

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset [B]_\delta \wedge B \subset [A]_\delta\} = \inf\{\delta > 0 : B \subset [A]_\delta \wedge A \subset [B]_\delta\} = d_H(B, A)$$

3. Para la desigualdad triangular procedemos de la siguiente forma:

Sean  $A, B, E \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ , si  $d_H(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset [B]_\delta \wedge B \subset [A]_\delta\}$ , entonces para cada  $\epsilon > 0$ , se tiene que:

$$A \subset [B]_{d_H(A, B) + \epsilon} \wedge B \subset [E]_{d_H(B, E) + \epsilon}$$

Luego por la proposición 2.2 si  $B \subset [E]_{d_H(B, E) + \epsilon}$ , se verifica que  $[B]_{d_H(A, B) + \epsilon} \subset [E]_{(d_H(A, B) + \epsilon) + (d_H(B, E) + \epsilon)}$ . Así pues:

$$A \subset [B]_{d_H(A, B) + \epsilon} \subset [E]_{(d_H(A, B) + \epsilon) + (d_H(B, E) + \epsilon)}$$

Procediendo de forma análoga con el conjunto  $E$ , se verifica que:

$$E \subset [B]_{d_H(B, E) + \epsilon} \subset [A]_{(d_H(A, B) + \epsilon) + (d_H(B, E) + \epsilon)}$$

De esta manera:

$$A \subset [E]_{d_H(A, B) + d_H(B, E) + 2\epsilon} \wedge E \subset [A]_{d_H(A, B) + d_H(B, E) + 2\epsilon}$$

Así pues, para cada  $\epsilon > 0$ , se cumple que:

$$d_H(A, E) \leq d_H(A, B) + d_H(B, E) + 2\epsilon$$

Por tanto:

$$d_H(A, E) \leq d_H(A, B) + d_H(B, E)$$

Y por consiguiente  $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), d_H)$  es un espacio métrico.

## 2.3. El Operador de Hutchinson

A partir de un **IFS**, podemos construir un operador contractivo muy importante denominado **El operador de Hutchinson**. Dicho operador fue creado por el Matemático inglés Jhon. E Hutchinson en el año 1981 con la finalidad de formalizar la construcción de conjuntos fractales en base al teorema del punto fijo.

**Definición. 2.3.1 – Operador de Hutchinson.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  un Sistema de Funciones Iteradas (IFS). El operador  $T : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , definido mediante  $T(A) = \bigcup_{i=1}^n w_i(A)$  es llamado **Operador asociado al IFS** y recibe el nombre de **Operador de Hutchinson** [1].

■ **Ejemplo. 2.3** El IFS que genera el Conjunto de Cantor en la recta es:

$$\begin{cases} w_1(x) = \frac{1}{3}x \\ w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Luego el operador de Hutchinson asociado al IFS anterior es:

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^2 w_i(A)$$

Así pues, si  $A = [0, 1]$  se tiene:

$$T([0, 1]) = w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1]) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

■ **Ejemplo. 2.4** El IFS que genera el triángulo de Sierpinsky viene dado por:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) \\ w_2(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) + (\frac{1}{2}, 0) \\ w_3(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) + (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}) \end{cases}$$

Luego el Operador de Hutchinson asociado al IFS anterior será:

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^3 w_i(A)$$

El cual si  $A$  fuera el triángulo con vértices en los puntos  $(0, 0), (2, 0), (1, \sqrt{3})$ , entonces:

$$T(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A)$$

Generando tres triángulos  $A_1 = w_1(A), A_2 = w_2(A), A_3 = w_3(A)$  cuyos vértices son respectivamente:  $(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  para  $A_1$ ;  $(1, 0), (2, 0), (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  para  $A_2$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (1, \sqrt{3})$  para  $A_3$ .

**Proposición 2.3** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ . Si  $A \subset [B]_\delta$  y  $w$  es una contracción con constante de contractividad  $k$ , entonces  $w(A) \subset [w(B)]_{k\delta}$ .

**Demostración.**

Para que  $w(A) \subset [w(B)]_{k\delta}$ , se debe demostrar que  $\forall y \in w(A) \Rightarrow y \in [w(B)]_{k\delta}$ .

**En efecto.** Si  $A \subset [B]_\delta$ , entonces  $\forall x \in A \Rightarrow x \in [B]_\delta$ . Luego  $d(x, B) < \delta$ .

Por otro lado, si  $x \in A \Rightarrow w(x) \in w(A)$  y como  $w$  es una contracción se tiene que  $d(w(x), w(B)) < kd(x, B)$ , luego  $d(w(x), w(B)) < k\delta$ . Por tanto  $w(x) \in [w(B)]_{k\delta}$ .

De esta manera  $w(x) \in w(A)$ , implica que  $w(x) \in [w(B)]_{k\delta}$ . Por tanto  $w(A) \subset [w(B)]_{k\delta}$ .

**Teorema 2.3.1** El Operador de Hutchinson  $T : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , definido mediante  $T = \bigcup_{i=1}^n w_i$  es un

operador contractivo en base a la métrica de Hausdorff, con constante de contractividad  $k_{\max}$ .

### Demostración.

Para demostrar que  $T = \bigcup_{i=1}^n w_i$  es contractivo debemos probar que para cualesquiera dos conjuntos  $A, B \subset \mathbb{H}(X)$ , se cumple:

$$d_H(T(A), T(B)) < k_{\max} d_H(A, B)$$

**En efecto.** Si  $A \subset [B]_\delta \wedge B \subset [A]_\delta$ , entonces por la proposición anterior se tiene:

$$w_i(A) \subset [w_i(B)]_{k_i \delta} \wedge w_i(B) \subset [w_i(A)]_{k_i \delta}, \forall i = 1, \dots, n$$

Luego si  $w_i(A) \subset [w_i(B)]_{k_i \delta}, \forall i = 1, \dots, n$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} w_1(A) &\subset [w_1(B)]_{k_1 \delta} \subset [w_1(B)]_{k_{\max} \delta} \\ w_2(A) &\subset [w_2(B)]_{k_2 \delta} \subset [w_2(B)]_{k_{\max} \delta} \\ &\vdots \\ w_n(A) &\subset [w_n(B)]_{k_n \delta} \subset [w_n(B)]_{k_{\max} \delta} \end{aligned}$$

Entonces:

$$w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_n(A) \subset [w_1(B)]_{k_{\max} \delta} \cup [w_2(B)]_{k_{\max} \delta} \cup \dots \cup [w_n(B)]_{k_{\max} \delta}$$

Por tanto:

$$\bigcup_{i=1}^n w_i(A) \subset \bigcup_{i=1}^n [w_i(B)]_{k_{\max} \delta} \subset [\bigcup_{i=1}^n w_i(B)]_{k_{\max} \delta}$$

Esto significa que:

$$T(A) \subset [T(B)]_{k_{\max} \delta}$$

Procediendo de manera análoga para cuando  $w_i(B) \subset [w_i(A)]_{k_i \delta}, \forall i = 1 \dots n$ , se obtiene que:

$$T(B) \subset [T(A)]_{k_{\max} \delta}$$

Luego Si  $A \subset [B]_\delta \wedge B \subset [A]_\delta$  y  $T$  es el operador de Hutchinson asociado al IFS  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  entonces:

$$T(A) \subset [T(B)]_{k_{\max} \delta} \wedge T(B) \subset [T(A)]_{k_{\max} \delta}$$

Ahora bien, la última inclusión nos indica que:

$$d_H(T(A), T(B)) = \inf \{k_{\max} \delta : T(A) \subset [T(B)]_{k_{\max} \delta} \wedge T(B) \subset [T(A)]_{k_{\max} \delta}\}$$

Entonces:



$$d_H(T(A), T(B)) \leq k_{\max} \delta$$

Por tanto:

$$d_H(T(A), T(B)) \leq k_{\max} d_H(A, B)$$

## 2.4. Existencia de Conjuntos Fractales

Con todas las herramientas matemáticas consideradas anteriormente, estamos en condiciones de justificar rigurosamente la existencia de Conjuntos Fractales clásicos. A continuación enunciamos y demostramos un resultado muy importante que puede ser considerado como el mundo donde habitan tales conjuntos.

Vale la pena mencionar que la idea de la demostración del teorema que enunciaremos a continuación es tomada del texto denominado **Geometría de Conjuntos Convexos** [7], impartido por el profesor **Manuel Ritoré Cortés** en el segundo ciclo de la licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada durante los cursos académicos 2004-05, 2005-06, sin embargo en nuestra demostración utilizamos nuestra propia notación acorde con la definición de  $\delta$ -vecindad propuesta en la sección (2.1).

**Teorema 2.4.1 – Completitud de  $\mathbb{H}(\mathbb{R}^n)$ .** El espacio métrico  $(\mathbb{H}(\mathbb{R}^n), d_H)$  es un espacio métrico completo.

**Demostración.**

Sea  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy. Entonces  $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$  es un conjunto acotado.

**En efecto.**

Si  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, entonces:

$$\forall \epsilon > 0, \exists i_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \forall j, p \geq i_0, \text{ se tiene que } d_H(K_j, K_p) < \epsilon$$

En particular si  $\epsilon = 1$ , existe  $i_0 \in \mathbb{N}$ , tal que:

$$d_H(K_p, K_{i_0}) < 1 \Rightarrow K_p \subset [K_{i_0}]_1$$

Luego:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \subset K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{i_0-1} \cup [K_{i_0}]_1$$

Y como los  $K_j$  son compactos, entonces  $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{i_0-1} \cup [K_{i_0}]_1$  es acotado. Por tanto  $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$  es acotado.

Por otro lado considere la sucesión  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , definida mediante  $A_i = \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} K_j}$ , entonces  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es

monótona decreciente y  $A_i \downarrow A$ , donde  $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ .

Afirmamos que  $A$  es el punto de convergencia de la sucesión  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . En efecto.

$\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = A$ , entonces  $\forall \epsilon > 0$ , existe  $i_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\forall i \geq i_0$ , se tiene que:

$$d_H(A_i, A) < \epsilon \implies A_i \subset [A]_\epsilon$$

Luego como  $A_i = \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} K_j}$ , entonces para  $i \geq i_0$ , tenemos que:

$$K_i \subset A_i \subset [A]_\epsilon \implies K_i \subset [A]_\epsilon$$

Por otro lado  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, entonces  $\forall \epsilon > 0 \exists i_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\forall i, j \geq i_0$ , se tiene que:

$$d_H(K_i, K_j) < \epsilon$$

Luego  $\forall i, j \geq i_0, K_j \subset [K_i]_\epsilon$ , entonces para  $j \geq i$ , se tiene que:

$$\overline{\bigcup_{j \geq i} K_j} \subset [K_i]_\epsilon \implies A \subset [K_i]_\epsilon$$

Así pues:

$$K_i \subset [A]_\epsilon \wedge A \subset [K_i]_\epsilon$$

Por tanto  $d_H(K_i, A) < \epsilon$ . Así pues  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy que converge dentro de  $\mathcal{h}(\mathbb{R}^n)$ , luego  $(\mathcal{h}(\mathbb{R}^n), d_H)$  es un espacio métrico completo.

Ahora ya estamos en condiciones de justificar rigurosamente la existencia de conjuntos fractales, pues la autosemejanza que presentan se puede expresar como el punto fijo de un operador contractivo. Tenemos todas las herramientas matemáticas para hacerlo, los insumos matemáticos que necesitamos son los siguientes:

**1.** Un espacio métrico completo. Es el espacio métrico completo formado por todos los subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ , denotado por  $\mathcal{h}(\mathbb{R}^n)$ .

**2.** Un operador contractivo. Es el operador de Hutchinson, definido mediante  $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} w_i$ .

**3.** Una métrica, la cual actuará sobre dicho espacio. Es la métrica de Hausdorff.

Como el operador de Hutchinson, actúa sobre el espacio métrico completo  $(\mathcal{h}(\mathbb{R}^n), d_H)$ , entonces definimos  $T : \mathcal{h}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{h}(\mathbb{R}^n)$ , con  $T(A_0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} w_i(A_0)$ , donde  $A_0$  es el conjunto de partida, al cual lo llamaremos **Conjunto semilla**.

Teniendo en cuenta que el operador de Hutchinson es un operador contractivo, por el teorema del

punto fijo concluimos que posee un único punto fijo al que denominaremos “Conjunto Fractal”.

Dicho punto fijo es el único conjunto invariante (o autosemejante) por el operador  $T$ , es decir es el único conjunto compacto que satisface  $T(A) = A$ .

Por lo comentado anteriormente podemos decir que todos los conjuntos que se generen en base a este proceso, tienen una formalización matemática rigurosa que nos conlleva a aceptar a tales conjuntos como parte de la Geometría Fractal.



## Capítulo 3

# Caracterización de Conjuntos Fractales Clásicos

La teoría de la medida juega un papel fundamental en la geometría fractal; es a partir de ella que se logra caracterizar a los conjuntos que habitan en este tipo de geometría. A continuación recordaremos algunos conceptos y resultados que serán de vital importancia para nuestros propósitos; dichos conceptos podemos encontrarlos en [8].

### 3.1. álgebras, $\sigma$ –álgebras y medida

**Definición. 3.1.1 – Anillo.** Sea  $\Omega$  un conjunto diferente del vacío y  $\mathcal{C}$  una familia de subconjuntos de  $\Omega$ .  $\mathcal{C}$  es llamada un anillo para  $\Omega$ , si se verifica que:

1.  $A \cup B \in \mathcal{C}, \forall A, B \in \mathcal{C}$ .
2.  $A \setminus B \in \mathcal{C}, \forall A, B \in \mathcal{C}$ .

Con estas dos propiedades nos basta para afirmar que tanto  $A \Delta B$  como  $A \cap B$  están en  $\mathcal{C}$ , pues:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \wedge A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B)$$

Son ejemplos de anillos los siguientes:

■ **Ejemplo. 3.1** Sea  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ . La familia  $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$  es un anillo para  $\Omega$ .

■ **Ejemplo. 3.2** Considere  $\Omega = \mathbb{R}$  y los intervalos de la forma  $\langle a, b \rangle$ , con  $-\infty < a \leq b < \infty$ , la colección  $\mathcal{C}$  definida por:

$$\mathcal{C} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle : \langle a_i, b_i \rangle \cap \langle a_j, b_j \rangle = \emptyset, i \neq j \right\}$$

Es un anillo para  $\mathbb{R}$ .

**Definición. 3.1.2 –  $\sigma$ –Álgebra.** Sea  $\Omega$  un conjunto diferente del vacío y  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos de  $\Omega$ .  $\mathcal{F}$  es llamada una  $\sigma$ –Álgebra para  $\Omega$ , si verifica las siguientes propiedades:

1.  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
2. Si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $A^c \in \mathcal{F}$
3. Si  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Al par  $(\Omega, \mathcal{F})$  se le llama **Espacio medible**, y a los elementos de  $\mathcal{F}$  se les denomina **Conjuntos medibles**.

Son ejemplos de  $\sigma$ –Álgebra las siguientes:

■ **Ejemplo. 3.3** Considere  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ . La familia  $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$ , es una  $\sigma$ –Álgebra para  $\Omega$ .

■ **Ejemplo. 3.4** Sea  $\Omega = \{a, b, c\}$ , la familia  $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$  es una  $\sigma$ –Álgebra para  $\Omega$ .

■ **Ejemplo. 3.5** Considere un conjunto  $X \neq \emptyset$  y sea  $\Omega = X$ , la familia  $\mathcal{F} = \{X, \emptyset\}$  constituye una  $\sigma$ –Álgebra para  $\Omega$ .

■ **Ejemplo. 3.6** En general para cualquier  $\Omega \neq \emptyset$ , se tiene que tanto  $\mathcal{P}(\Omega)$  como  $\{\Omega, \emptyset\}$ , constituyen una  $\sigma$ –Álgebra para  $\Omega$ .

**Observación 3.1** Para cualquier  $\Omega \neq \emptyset$ , a la familia  $\mathcal{P}(\Omega)$ , se le denomina **la mayor  $\sigma$ –Álgebra** para  $\Omega$ , y a la familia  $\{\Omega, \emptyset\}$ , se le denomina **la menor  $\sigma$ –Álgebra** para  $\Omega$ .

**Observación 3.2** Si la propiedad (3), se verifica solo para una colección finita, entonces a  $\mathcal{F}$  se le denomina **Álgebra**.

**Definición. 3.1.3 –  $\sigma$ –Álgebra generada.** Sea  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ , a la  $\sigma$ –álgebra definida por:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra} \wedge \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \}$$

Se le denomina  $\sigma$ –álgebra generada por la clase  $\mathcal{C}$ .

Un ejemplo muy importante que se obtiene a partir de esta definición es la llamada  $\sigma$ –Álgebra de **Borel**, denominada así en honor al matemático Francés **Félix Édouard Justin Émile Borel**.

■ **Ejemplo. 3.7** Considere la colección  $\mathcal{C}$  formada por todos los intervalos abiertos  $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  a la  $\sigma$ –Álgebra definida por:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{ \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} : a \leq b \}$$

Se le denomina  $\sigma$ –Álgebra de Borel. A los elementos de  $\mathbb{R}$  se les denomina Conjuntos de Borel, Borelianos o Borel medibles.

Los intervalos  $[a, b]$ ,  $\langle a, +\infty \rangle$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $\langle -\infty, b \rangle$ ,  $\langle -\infty, b]$ ,  $[a, b]$ ,  $\langle a, b \rangle$  y  $\{a\}$  están en  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Pues:

$$[a, b] = \bigcap_{i=1}^n \langle a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \rangle$$

$$\langle a, +\infty \rangle = \bigcup_{i=1}^n \langle a, n \rangle$$

$$[a, +\infty) = \bigcap_{i=1}^n \langle a - \frac{1}{n}, +\infty \rangle$$

$$\langle -\infty, b \rangle = \bigcup_{i=1}^n \langle -n, b \rangle$$

$$\langle -\infty, b] = \bigcap_{i=1}^n \langle -\infty, b + \frac{1}{n} \rangle$$

$$[a, b] = \bigcap_{i=1}^n \langle a - \frac{1}{n}, b \rangle$$

$$\langle a, b \rangle = \bigcap_{i=1}^n \langle a, b + \frac{1}{n} \rangle$$

$$\{a\} = \bigcap_{i=1}^n \langle a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \rangle$$

**Definición. 3.1.4 – Medida.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible, la función  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida si satisface las siguientes propiedades:

$$1. \mu(\emptyset) = 0$$

2. Dados  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ , con  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para  $i \neq j$ , entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

La propiedad (2), recibe el nombre de **Numerabilidad Aditiva** y a la terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  se le llama **Espacio de Medida**.

Son ejemplos de medida las siguientes funciones:

■ **Ejemplo. 3.8** Considere el espacio medible  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ , la función  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$  definida por:

$$\mu(A) = \text{Car}(A)$$

Donde  $\text{Car}(A)$  indica el cardinal del conjunto  $A$ , define una medida.

■ **Ejemplo. 3.9** Dado un espacio  $\Omega$  no numerable y la  $\sigma$ -Álgebra  $\mathcal{F}$ , definida por:

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : A \text{ o } A^c \text{ es numerable}\}$$

La función  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$  definida por:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ es numerable} \end{cases}$$

Define una medida.

**Observación 3.3** Encontrar una función  $\mu$  que satisfaga las dos propiedades de medida definidas anteriormente resulta complicado, muchas veces solo se verifican para una colección muy reducida de

conjuntos. Esto es suficiente motivo para pensar en extender la medida  $\mu$  a una colección mucho más amplia; dicho propósito se logra a partir de un concepto clásico de la teoría de la medida denominado **Medida Exterior**. (Libro de Extremadura)

**Definición. 3.1.5 – Medida exterior.** Sea  $\Omega$  un conjunto diferente del vacío. La función  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  es llamada una medida exterior si verifica las siguientes propiedades:

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. Si  $A \subset B$ , entonces  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  es una sucesión de conjuntos entonces:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

■ **Ejemplo. 3.10** Considere cualquier conjunto  $\Omega \neq \emptyset$ . La función  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ , mediante:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ 1 & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

Define una medida exterior. En efecto:

La propiedad (1) se verifica por la definición de  $\mu^*$ . Para la segunda propiedad; sea  $A \subset B$ , si  $A = \emptyset$  y  $B = \emptyset$ , entonces  $0 \leq 0$ ; si  $A = \emptyset$  y  $B \neq \emptyset$ , entonces se tiene  $0 \leq 1$ , finalmente si  $A \neq \emptyset$  y  $B \neq \emptyset$  en este caso  $1 \leq 1$ .

La propiedad (3) se verifica análogamente.

El siguiente resultado es de mucha importancia en la caracterización de medidas exteriores, pues a partir del mismo resulta muy fácil construir una gran variedad de medidas exteriores.

**Teorema 3.1.1** Sea  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  una colección de conjuntos y  $\rho : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  una función para la cual se verifica que  $\rho(\emptyset) = 0$ . Entonces para cada  $B \subset \Omega$  la función  $\mu^*$  definida por:

$$\mu^*(B) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : A_n \subset \mathcal{C} \wedge B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$$

Define una medida exterior y se le denomina **Medida exterior generada por  $\rho$** .

**Demostración.**

Se deben verificar las tres propiedades. En efecto.

**Demostración de (1)**

Es trivial dado que  $\rho(\emptyset) = 0$ , luego  $\mu^*(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\emptyset) = 0$ .



**Demostración de (2)**

Si  $A = B$  la desigualdad es inmediata; si  $A$  es parte propia de  $B$  entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  posee por lo menos un conjunto más que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , luego  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(B_n)$ , Por tanto:

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : A_n \subset \mathcal{C} \wedge A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(B_n) : B_n \subset \mathcal{C} \wedge B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\}$$

Así pues:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

**Demostración de (3)**

Considere el conjunto  $B_n \subset \Omega$ , entonces:

$$\mu^*(B_n) = \inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \rho(A_{nm}) : A_{nm} \subset \mathcal{C} \wedge B_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}\right\}$$

Luego por la definición de  $\inf$ ,  $\forall \epsilon > 0, \exists$  una colección  $\{A_{nm}\}$ , talque:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho(A_{nm}) \leq \mu^*(B_n) + \epsilon'$$

Aplicando sumatoria a ambos lados resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \rho(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(B_n) + \epsilon')$$

Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \rho(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon'$$

A partir de esta desigualdad nos damos cuenta que haciendo  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2^n}$ , se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \rho(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

Así pues:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \rho(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \epsilon$$

Ahora bien, aplicando  $\inf$  a ambos lados resulta lo deseado; es decir:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$$

Luego:

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : A_n \subset \mathcal{C} \wedge B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

Es una medida exterior.

■ **Ejemplo. 3.11** Considere en  $\mathbb{R}$  la colección  $\mathcal{C} = \{ \langle a, b \rangle : a \leq b, a, b \in \mathbb{R} \}$  y defínase  $\rho$  mediante  $\rho(\langle a, b \rangle) = b - a$ , entonces para el conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , la función definida por:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : \langle a_n, b_n \rangle \in \mathcal{C} \wedge A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n \rangle \right\}$$

Es una medida exterior denominada **Medida Exterior de Lebesgue** y a menudo se usa  $m(A)$  en lugar de  $\mu^*(A)$ .

## 3.2. Medida y dimensión de Hausdorff

En base a la definición de medida exterior, Felix Haudorff introdujo en el año 1916 una medida denominada hoy en día Medida de Hausdorff.

**Definición. 3.2.1 – Medida de Hausdorff.** Sean  $\Omega$  un espacio métrico. Para cada  $s > 0$ ,  $\delta > 0$  y  $F \subset \Omega$  denotamos y definimos a la medida exterior de Hausdorff de  $F$  de la siguiente manera:

$$H_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^s : F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, |A_n| \leq \delta \right\}$$

Donde  $|A_n|$ , denota el diámetro de  $A_n$  y a  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se le denomina  $\delta$ -cubrimiento de  $F$ .

No es difícil observar que cuando  $\delta$  decrece el valor de  $H_{\delta}^s(F)$  crece, luego tiene sentido calcular el límite cuando  $\delta$  tiende a cero. A dicho límite se le denota y se le define mediante:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(F)$$

Y se le llama **Medida de Hausdorff  $s$ -dimensional** de  $F$  y  $s = \dim_H(F)$  indica la dimensión de Hausdorff del conjunto  $F$ .

**Observación 3.4** Hemos utilizado al conjunto  $F$  dado que la medida de Hausdorff es la indicada para medir conjuntos fractales y de alguna manera relacionamos al término fractal con  $F$ .

Si  $s$  toma valores enteros entonces  $H^s(F)$  tiene los siguientes significados:

$H^1(F)$  mide la longitud de  $F$ .

$H^2(F)$  mide el área de  $F$ .

$H^3(F)$  mide el volumen de  $F$ , etc.

Haciendo uso de la teoría de exponentes y la teoría de la medida podemos demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 3.1** Sea  $\Omega$  un espacio métrico y  $F \subset \Omega$ . Si  $H^s$  la medida  $s$ -dimensional de  $F$ , entonces se verifica que:

$$H^t(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > s \\ \infty & \text{si } t < s \end{cases}$$

**Demostración.**

Considere  $t > s$  y  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un  $\delta$ -cubrimiento de  $F$  entonces:

$$H_\delta^t(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^t \Rightarrow H_\delta^t(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^s \cdot |A_n|^{t-s}$$

Como  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un  $\delta$ -cubrimiento de  $F$  entonces  $|A_n| \leq \delta$ , luego:

$$H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^s$$

Ahora bien, aplicando ínf a ambos lados resulta:

$$H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$$

Si aplicamos el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$ , al tener que  $t > s$ , podemos inferir que  $\delta^{t-s} \rightarrow 0$ , luego en la desigualdad anterior se tiene:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^t(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$$

Luego:

$$H^t(F) \leq 0 \cdot H^s(F)$$

Obteniendo  $H^t(F) \leq 0$  y como  $H^t$  es una medida concluimos que  $H^t(F) = 0$ .

Analogamente si  $t < s$ , entonces  $s > t$  luego:

$$H_\delta^s(F) \leq \delta^{s-t} H_\delta^t(F)$$

Entonces:

$$H_\delta^t(F) \geq \frac{1}{\delta^{s-t}} H^s(F)$$

Y como  $\delta^{s-t} \rightarrow 0$ , entonces  $\frac{1}{\delta^{s-t}} \rightarrow \infty$ . Luego:

$$H_\delta^t(F) \geq \infty$$

Por lo que:

$$H_\delta^t(F) = \infty$$

De esta manera se tiene que:

$$H^t(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > s \\ \infty & \text{si } t < s \end{cases}$$

A partir de este resultado **Felix Haudorff** definió a la dimensión de un conjunto de la siguiente manera.

**Definición. 3.2.2 – Dimensión de Hausdorff.** Sea  $\Omega$  un espacio métrico y  $F \subset \Omega$ . A la dimensión del conjunto  $F$  se le denota y se le define de la siguiente manera:

$$\dim_H(F) = \inf\{s > 0 : H^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}$$

Con el convenio de que  $\inf(\emptyset) = \infty$  y  $\sup(\emptyset) = 0$ , para el caso de que tanto los conjuntos  $\{s > 0 : H^s(F) = 0\}$  como  $\{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}$  sean el vacío.

Teniendo en cuenta la definición anterior, podemos escribir:

$$H^s(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > \dim_H(F) \\ \infty & \text{si } s < \dim_H(F) \end{cases}$$

La dimensión de Hausdorff también fué profundamente estudiada por el matemático ruso Abram Besicovitch, razón por la cual hoy en día se le denomina **Dimensión de Hausdorff-Besicovitch**.

**Teorema 3.2.1 – Propiedad de escalamiento.** Dado  $F \subset \mathbb{R}^n$  y para  $\lambda > 0$  defínase  $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$ . Entonces:

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F)$$

(Kenneth Falconer - Pág. 27)

**Demostración.**

Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un  $\delta$ -cubrimiento de  $F$ , entonces  $\{\lambda A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un  $\lambda\delta$ -cubrimiento de  $\lambda F$ ; es decir si  $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  con  $|A_n| \leq \delta$ , entonces  $\lambda F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda A_n$  y  $|\lambda A_n| \leq \lambda\delta$

Luego:

$$H_{\lambda\delta}^s(\lambda F) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda A_n|^s : \lambda F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda A_n \wedge |\lambda A_n| \leq \lambda\delta\right\}$$

A partir de esto se tiene que  $H_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda A_n|^s$ , luego  $H_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^s$ . Así pues al aplicar ínfimo a ambos lados se obtiene:

$$\inf H_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^s : F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, |A_n| \leq \delta\right\}$$

De esta manera  $H_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s H_{\delta}^s(F)$  y al aplicar el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$ , obtenemos que:

$$H^s(\lambda F) \leq \lambda^s H^s(F)$$

Por otro lado si en la desigualdad anterior reemplazamos  $\lambda$  por  $\frac{1}{\lambda}$  y  $F$  por  $\lambda F$ , resulta que

$$H^s(\frac{1}{\lambda}F) \leq (\frac{1}{\lambda})^s H^s(\lambda F)$$

Luego:

$$H^s(F) \leq \frac{1}{\lambda^s} H^s(\lambda F)$$

Por tanto  $H^s(\lambda F) \geq \lambda^s H^s(F)$ , y como  $H^s(\lambda F) \leq \lambda^s H^s(F)$  entonces  $H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F)$ .

A este resultado se le denomina **propiedad de escalamiento** y es de vital importancia para el cálculo de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch de un conjunto autosemejante.

■ **Ejemplo. 3.12** En el conjunto de cantor  $C$ , se observa que  $C = C_1 \cup C_2$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son los que se muestran en la figura



Figura 3.1: Escalamiento del Conjunto de Cantor.

No es difícil observar que  $C_1 = \frac{1}{3}C$  y  $C_2 = \frac{1}{3}C$  y como  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ , entonces:

$$H^s(C) = H^s(C_1 \cup C_2) = H^s(C_1) + H^s(C_2) = H^s(\frac{1}{3}C) + H^s(\frac{1}{3}C) = 2H^s(\frac{1}{3}C)$$

Esto implica que  $H^s(C) = 2H^s(\frac{1}{3}C)$  y por la propiedad escalar se tiene que:

$$H^s(C) = 2(\frac{1}{3})^s H^s(C)$$

Y como  $H^s(C) \neq 0$ , entonces  $1 = 2(\frac{1}{3})^s$  y al aplicar logaritmos resulta que:

$$s = \dim_H(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309297536 \dots$$

A partir de este resultado podemos verificar la proposición anterior de la siguiente manera:

El conjunto de Cantor está formado por etapas de la forma siguiente:

En la primera etapa se necesitan 2 intervalos de longitud  $\frac{1}{3}$ .

En la Segunda etapa se necesitan  $2^2$  intervalos de longitud  $(\frac{1}{3})^2$ .

Así sucesivamente en la  $n$ -ésima etapa se necesitan  $2^n$  intervalos de longitud  $(\frac{1}{3})^n$ .

Luego:

$$H^s(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n \right]^s$$

Ahora bien, tomemos  $s > \frac{Ln2}{Ln3}$ , por ejemplo  $s = 1$ . Entonces:

$$H^1(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n \right]^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 0$$

Por otro lado si  $s < \frac{Ln2}{Ln3}$ , por ejemplo  $s = 0$ , resulta:

$$H^0(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n \right]^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

De esta manera:

$$H^s(C) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > \frac{Ln2}{Ln3} \\ \infty & \text{si } s < \frac{Ln2}{Ln3} \end{cases}$$

Además, si  $s = \frac{Ln2}{Ln3}$ , se tiene:

$$H^{\frac{Ln2}{Ln3}}(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n \right]^{\frac{Ln2}{Ln3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^{n \frac{Ln2}{Ln3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \left[ e^{Ln(\frac{1}{3})} \right]^{n \frac{Ln2}{Ln3}}$$

Pero  $e^{Ln(\frac{1}{3}) \cdot n \cdot \frac{Ln2}{Ln3}} = e^{-Ln3 \cdot n \cdot \frac{Ln2}{Ln3}} = e^{-nLn2} = e^{Ln2^{-n}} = 2^{-n}$ , luego:

$$H^{\frac{Ln2}{Ln3}}(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot 2^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

■ **Ejemplo. 3.13** En el Triángulo de Sierpinski  $F$ , se tiene que  $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ , y el factor de escalamiento es  $\frac{1}{2}$

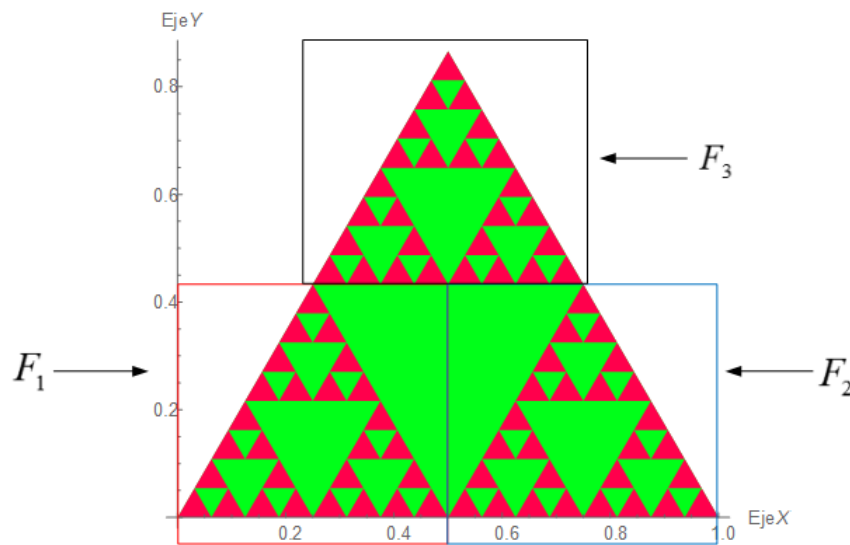


Figura 3.2: Escalamiento del Triángulo de Sierpinski.

Así pues:

$$H^s(F) = H^s(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = H^s(F_1) + H^s(F_2) + H^s(F_3) = H^s\left(\frac{1}{2}F\right) + H^s\left(\frac{1}{2}F\right) + H^s\left(\frac{1}{2}F\right) = 3H^s\left(\frac{1}{2}F\right)$$

Esto implica que  $H^s(F) = 3H^s(\frac{1}{2}F)$  y por la propiedad escalar se tiene que:

$$H^s(F) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^s H^s(F)$$

Siendo  $H^s(F) \neq 0$ , se tiene que  $1 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^s$  y al aplicar logaritmos resulta que:

$$s = \dim_H(F) = \frac{Ln3}{Ln2} = 1 \cdot 584962501 \dots$$

En este caso en la  $n$ -ésima etapa se necesitan  $3^n$  triángulos de lado  $\frac{1}{2^n}$ , luego

$$H^s(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^s$$

Ahora bien, tomemos  $s > \frac{Ln3}{Ln2}$ , por ejemplo  $s = 2$ . Entonces:

$$H^2(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Por otro lado si  $s < \frac{Ln3}{Ln2}$ , por ejemplo  $s = 1$ , resulta:

$$H^1(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 \cdot 5)^n = \infty$$

Así pues:

$$H^s(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > \frac{Ln3}{Ln2} \\ \infty & \text{si } s < \frac{Ln3}{Ln2} \end{cases}$$

Por otro lado, si  $s = \frac{Ln3}{Ln2}$ , se tiene:

$$H^{\frac{Ln3}{Ln2}}(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^{\frac{Ln3}{Ln2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n \frac{Ln3}{Ln2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left[e^{Ln(\frac{1}{2})}\right]^{n \frac{Ln3}{Ln2}}$$

Pero  $e^{Ln(\frac{1}{2}) \cdot n \cdot \frac{Ln3}{Ln2}} = e^{-Ln2 \cdot n \cdot \frac{Ln3}{Ln2}} = e^{-nLn3} = e^{Ln3^{-n}} = 3^{-n}$ , luego:

$$H^{\frac{Ln3}{Ln2}}(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot 3^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

A la dimensión de Hausdorff-Besicovitch se le puede interpretar como la capacidad que tiene un conjunto para ocupar el espacio en que está sumergido, por ejemplo en el conjunto de cantor  $s = 0 \cdot 6309297536 \dots$  está entre 0 y 1, esto significa que su capacidad de ocupar  $\mathbb{R}$  se puede cuantificar con un valor de  $s = 0 \cdot 6309297536 \dots$ , mientras que un segmento de recta tiene dimensión 1, lo cual

indica que su capacidad es de **uno**.

Análogamente para el triángulo de sierspinski  $s = 1 \cdot 584962501 \dots$  nos revela que la capacidad de ocupar  $\mathbb{R}^2$  se puede cuantificar con un valor de  $1 \cdot 584962501 \dots$ .

Aunque la dimensión de Hausdorff es muy rica en el aspecto formal, notamos que es muy laboriosa y puede resultar engorrosa al momento de calcularla, es más para algunos conjuntos que son fractales pero que no se generan a travez de un **IFS** se debe realizar un análisis muy profundo con la finalidad de encontrar un escalamiento y a partir de allí determinar su dimensión; esto es suficiente motivo para pensar en una definición alternativa que sea de fácil manejo y que se pueda calcular inclusive desde un punto vista computacional.

### 3.3. Dimensión de Conteo de Cajas

Con la finalidad de formalizar la definición de conteo de cajas, empezaremos observando el valor de la dimensión de ciertos conjuntos elementales a partir de un escalamiento.

Considere un segmento de recta de longitud **Uno** y respondamos a la siguiente interrogante. ¿Cuántos segmentos de igual longitud como mínimo se necesitan para cubrirlo?

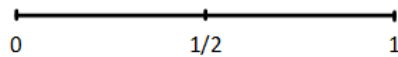


Figura 3.3: Número mínimo de segmentos que cubren un segmento.

No es difícil observar que el mínimo número de conjuntos de igual longitud que se necesitan para cubrir dicho segmento es 2, los cuales son de longitud  $\frac{1}{2}$ .

En un cuadrado unidad se necesitarán cuatro cuadrados de lado  $\frac{1}{2}$

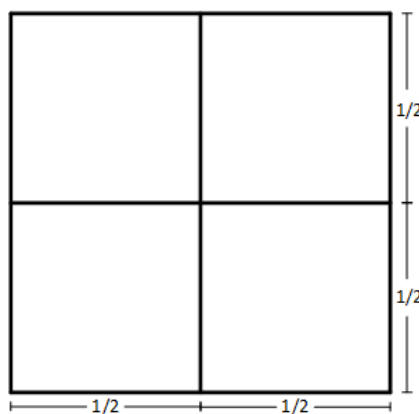


Figura 3.4: Número mínimo de cuadrados que cubren un cuadrado.

Ahora bien; en el segmento, el mínimo número de conjuntos es  $2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ , para el cuadrado se tiene  $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ , en general para un cubo  $n$ -dimensional se necesitarán como mínimo  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$ , en base a este análisis podemos darnos cuenta que si  $N_\delta(F)$  es el mínimo número de cubos de lado  $\delta$  que se necesitan para cubrir  $F$ , entonces:



$$N_\delta(F) = \delta^{-n}$$

Por ejemplo en un cubo  $F$  si se toma  $\delta = \frac{1}{3}$ , entonces  $N_{\frac{1}{3}}(F) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$ .

La igualdad  $N_\delta(F) = \delta^{-n}$  se verifica para dimensiones enteras y para conjuntos autosemejantes pero en general se debe considerar constantes  $k$  y  $s$  y la relación de proporcionalidad:

$$N_\delta(F) \sim k\delta^{-s}$$

Donde  $s$  es llamada la **dimensión** de  $F$ .

Si aplicamos logaritmos a ambos lados se tiene:

$$\text{Ln}[N_\delta(F)] \simeq \text{Ln}k - s\text{Ln}\delta \cdots (1 \cdot 1)$$

Pero  $N_\delta(F) \sim k\delta^{-s}$  implica que  $k \sim N_\delta(F)\delta^s$ , luego al aplicar el límite resulta que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} k \simeq \lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F)\delta^s \simeq 0$$

Por tanto tiene sentido definir  $s$  a partir de la relación  $(1 \cdot 1)$  mediante:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}[N_\delta(F)]}{-\text{Ln}\delta}$$

Y cuando no se pueda alcanzar dicho límite, se consideran formalmente los límites inferior y superior.

**Definición. 3.3.1 – Conteo de Cajas.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto acotado diferente del vacío y sea  $N_\delta(F)$  el menor número de conjuntos con diámetro menor o igual que  $\delta$  que cubren a  $F$  [3]. A la dimensión inferior y superior de conteo de cajas se le denota y se le define respectivamente de la siguiente manera:

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}[N_\delta(F)]}{-\text{Ln}\delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}[N_\delta(F)]}{-\text{Ln}\delta}$$

Al valor común se le denomina **dimensión de conteo de cajas** o simplemente **dimensión de caja** o **box-counting dimension** de  $F$  y se le define por:

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}[N_\delta(F)]}{-\text{Ln}\delta}$$

Como ya dijimos anteriormente para dimensiones enteras y conjuntos fractales clásicos se verifica la igualdad:

$$\dim_B F = \frac{\text{Ln}[N_\delta(F)]}{-\text{Ln}\delta}$$

A partir de la fórmula anterior podemos calcular la dimensión de muchos conjuntos fractales clásicos. A continuación exhibimos concretamente el proceso de cálculo.

■ **Ejemplo. 3.14** Sea el cuadrado unidad  $F = [0, 1]^2$ . Si consideramos  $\delta = \frac{1}{3}$ , entonces necesitamos  $N_\delta(F) = 9$  cuadrados para cubrir  $F$

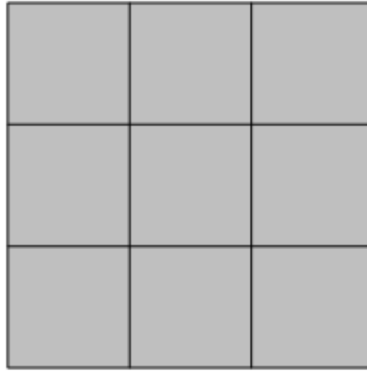


Figura 3.5: Número mínimo de cuadrados de lado  $\frac{1}{3}$  que cubren  $[0, 1]^2$ .

Luego:

$$\dim_B(F) = \frac{\ln \left[ N_{\frac{1}{3}}(F) \right]}{-\ln \left( \frac{1}{3} \right)} = \frac{\ln 9}{\ln 3} = \frac{2\ln 3}{\ln 3} = 2$$

■ **Ejemplo. 3.15** Para la alfombra de sierspinski  $A$  se necesitan como mínimo 8 cajas (los cuadrados de rojo) de lado  $\frac{1}{3}$  para cubrirla

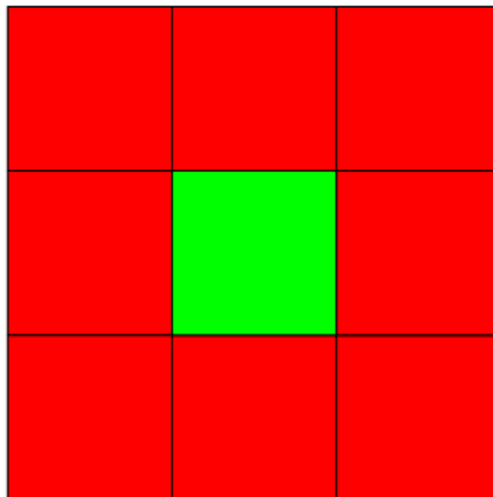


Figura 3.6: Número mínimo de cajas de lado  $\frac{1}{3}$  que cubren a la Alfombra de Sierspinski.

Luego:

$$\dim_B(A) = \frac{\ln \left[ N_{\frac{1}{3}}(F) \right]}{-\ln \left( \frac{1}{3} \right)} = \frac{\ln 8}{\ln 3} = \frac{3\ln 2}{\ln 3} = 1.892789261 \dots$$

■ **Ejemplo. 3.16** En el caso de la curva de Koch  $K$ , se necesitan como mínimo 4 cajas (intervalos) de  $\frac{1}{3}$  de longitud para cubrirla

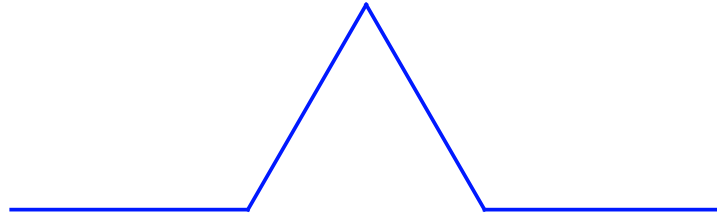


Figura 3.7: Número mínimo de cajas de lado  $\frac{1}{3}$  que cubren a la Curva de Koch.

Luego:

$$\dim_B(K) = \frac{\ln \left[ N_{\frac{1}{3}}(F) \right]}{-\ln \left( \frac{1}{3} \right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.261859507 \dots$$

■ **Ejemplo. 3.17** En el triángulo de Sierpinski  $S$ , se requieren con mínimo 3 triángulos escalados a  $\frac{1}{2}$

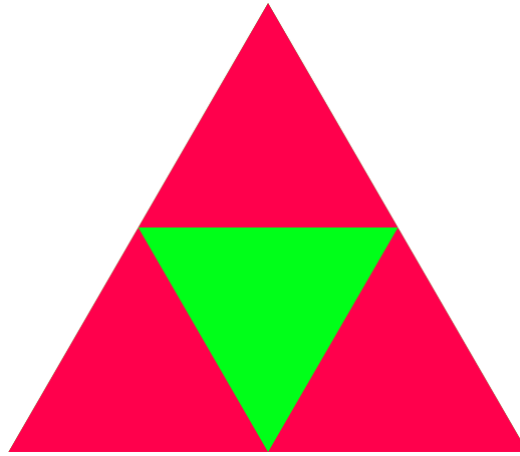


Figura 3.8: Número mínimo de cajas de lado  $\frac{1}{2}$  que cubren al Triángulo de Sierpinski.

Así pues:

$$\dim_B(S) = \frac{\ln \left[ N_{\frac{1}{2}}(F) \right]}{-\ln \left( \frac{1}{2} \right)} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.584962501 \dots$$

En conjuntos fractales clásicos la escala no es relevante para calcular la dimensión, dado que el resultado es el mismo; por ejemplo en la curva de Koch en la segunda y tercera iteración se necesitan 16 y 64 segmentos escalados a  $\frac{1}{9}$  y  $\frac{1}{27}$  respectivamente y si aplicamos la fórmula de dimensión se obtiene:

$$\dim_B(K) = \frac{\ln \left[ N_{\frac{1}{9}}(F) \right]}{-\ln \left( \frac{1}{9} \right)} = \frac{\ln 16}{\ln 9} = \frac{2\ln 4}{2\ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.261859507 \dots$$

Análogamente:

$$\dim_B(K) = \frac{\ln \left[ N_{\frac{1}{27}}(F) \right]}{-\ln \left( \frac{1}{27} \right)} = \frac{\ln 64}{\ln 27} = \frac{3\ln 4}{3\ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.261859507 \dots$$

■ **Ejemplo. 3.18** En la esponja de Menger  $E$ , necesitamos 20 cubos de  $\frac{1}{3}$  de arista

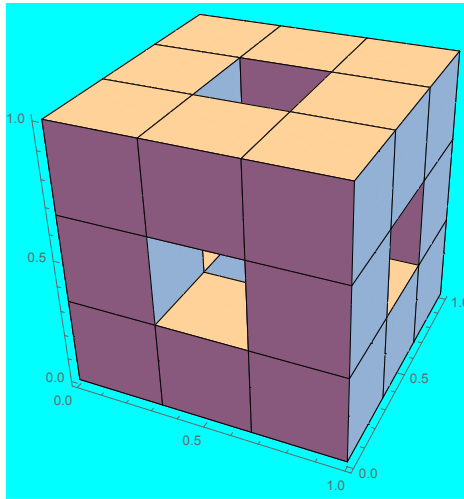


Figura 3.9: Número mínimo de cajas de lado  $\frac{1}{3}$  que cubren a la Esponja de Menger.

Por tanto:

$$\dim_B(E) = \frac{\ln [N_{\frac{1}{3}}(F)]}{-\ln(\frac{1}{3})} = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2 \cdot 726833028 \dots$$

### 3.4. Técnicas Computacionales de Cálculo

Formalmente tanto la dimensión de Hausdorff como la dimensión de caja (Box-Counting) son muy importantes en la caracterización de conjuntos, sin embargo en la práctica su cálculo se torna engorroso dado que es difícil tener una visión general de todo el conjunto. A pesar de esta dificultad a la dimensión **box-counting** es posible implementarla computacionalmente y tener un resultado aproximado. A continuación describimos un algoritmo de cálculo que se puede implementar computacionalmente.

Considere un conjunto cuya gráfica es  $F$ , es bien sabido que:

$$N_\delta(F) \sim k\delta^s$$

Luego:

$$\ln[N_\delta(F)] \sim \ln k - s \ln \delta$$

La cual es una recta con variable independiente  $\ln \delta$ , variable dependiente  $\ln[N_\delta(F)]$  y pendiente  $s$ . A partir de esto, el algoritmo consta de los siguientes pasos:

1. Ubicar la imagen  $F$  en un rectángulo.
2. Mayar el rectángulo considerando un tamaño de paso  $\delta$ ; de preferencia considerar las escalas  $\delta = \frac{1}{2}, \delta = \frac{1}{4}, \delta = \frac{1}{8}, \dots$
3. Contar el número de cajas  $N_\delta(F)$  que contienen a la imagen  $F$  y anotar el par  $(\ln(\delta), \ln[N_\delta(F)])$ .

4. Ajustar los datos a una recta de **Regresión Lineal**; la pendiente  $s$  de la recta será aproximadamente la dimensión box-counting de la imagen  $F$ .

■ **Ejemplo. 3.19** Considere el conjunto  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin x, 0 \leq x \leq 1\}$ , no es difícil saber que se trata de una curva a la cual se le asocia dimensión  $s = 1$ .

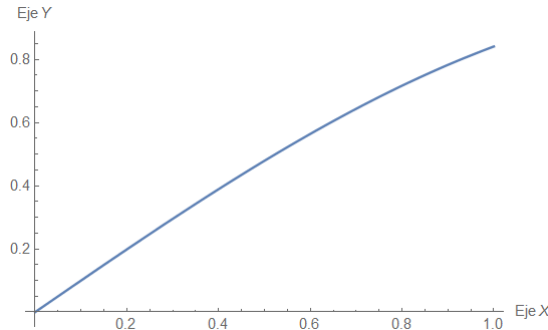


Figura 3.10: Gráfica de la función  $f(x) = \sin x$ .

Si ubicamos la gráfica anterior en un cuadrado de lado 1 y se construye un mayado para diferentes valores de  $\delta$ , se obtienen los siguientes datos para el par  $(\log(\frac{1}{\delta}), \log[N_\delta(F)])$

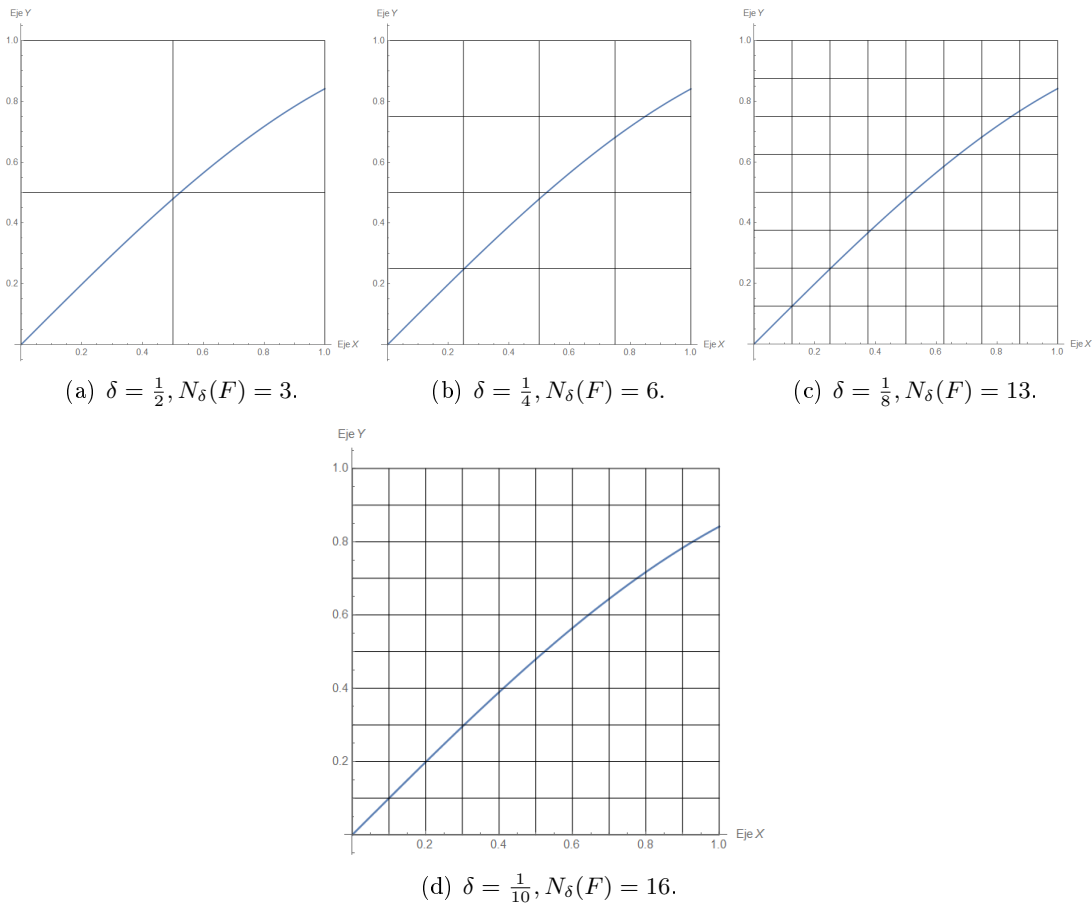


Figura 3.11: Mayado para la gráfica de  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq 1\}$ .

De esta manera se tiene los pares:  $(\ln(\frac{1}{2}), \ln(3)), (\ln(\frac{1}{4}), \ln(6)), (\ln(\frac{1}{8}), \ln(13)), (\ln(\frac{1}{10}), \ln(16))$  y al ajustarlos a una recta de regresión lineal se obtiene la recta:

$$\ln[N_\delta(F)] = 0 \cdot 358843 - 1 \cdot 05124 \ln(\delta)$$

Luego  $s = 1 \cdot 05124$  representa la dimensión del conjunto  $F$ .

Si agregamos los datos  $(\ln(\frac{1}{16}), \ln(25))$  y  $(\ln(\frac{1}{18}), \ln(28))$  a la información anterior, se origina la siguiente recta de regresión lineal:

$$\ln[N_\delta(F)] = 0 \cdot 394189 - 1 \cdot 02387 \ln(\delta)$$

Obteniéndose como dimensión  $s = 1 \cdot 02387$ .

Al agregar más pares se espera que el valor de  $s$  se acerque a **Uno**.

■ **Ejemplo. 3.20** Considere el Triángulo de Sierpinski, cuya dimensión es  $\frac{\ln 3}{\ln 2} = 1 \cdot 584962501 \dots$

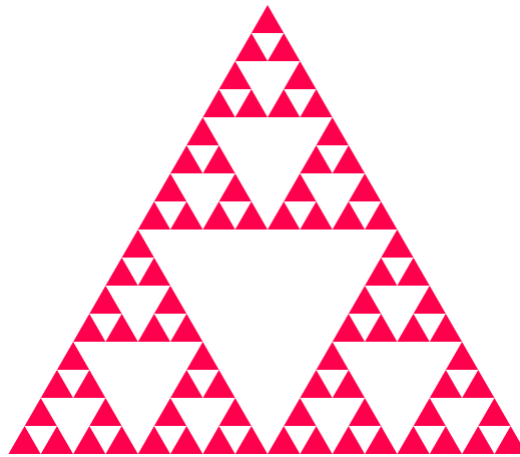


Figura 3.12: Triángulo de Sierpinski con 4 iteraciones.

Al igual que en el ejemplo anterior, si ubicamos el triángulo en un cuadrado unidad y se construye un mayado para diferentes valores de  $\delta$ , se obtienen los siguientes datos para el par  $(\log(\frac{1}{\delta}), \log[N_\delta(F)])$

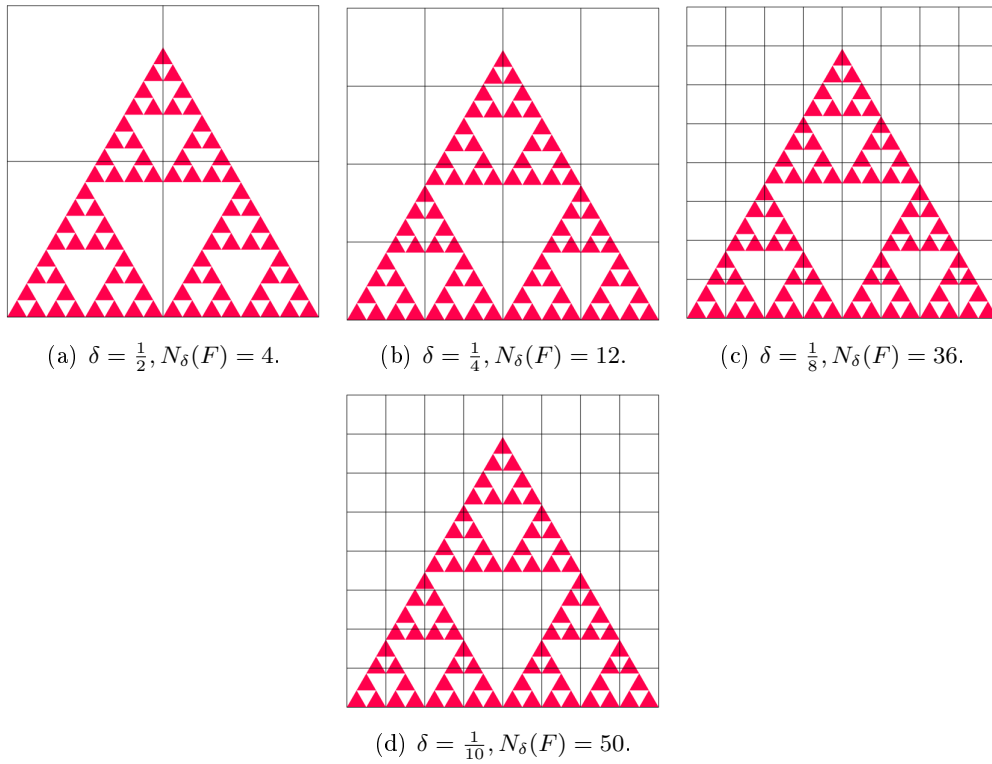


Figura 3.13: Mayado para el Triángulo de Sierpinski con cuatro iteraciones.

Así pues se tiene los pares:  $(Ln(\frac{1}{2}), Ln(4))$ ,  $(Ln(\frac{1}{4}), Ln(12))$ ,  $(Ln(\frac{1}{8}), Ln(36))$ ,  $(Ln(\frac{1}{10}), Ln(50))$  y al ajustarlos a una recta de regresión lineal se obtiene la recta:

$$Ln[N_\delta(F)] = 0 \cdot 298956 - 1 \cdot 57409 Ln(\delta)$$

Luego  $s = 1 \cdot 57409$  representa aproximadamente la dimensión del Triángulo de Sierpinski. De hecho que al seguir aumentando los datos se llega a obtener como dimensión  $\frac{Ln3}{Ln2} = 1 \cdot 584962501 \dots$ .





## Capítulo 4

# Funciones Fractales

### 4.1. Funciones Fractales como límites de series

El famoso Matemático Alemán **Carl Weierstrass** propuso una función que contradijo a la idea que se tenía hasta ese momento sobre diferenciabilidad. La idea clásica decía lo siguiente:

*...La gráfica de toda función continua posee tangente bien definida en todos sus puntos, salvo quizás en un número finito de ellos...*

Para contradecir esta idea, Carl Weierstrass propuso una función que justamente lleva su nombre y que a continuación definimos e ilustramos.

Considere el número real  $s \in \langle 1, 2 \rangle$  y el número real  $\lambda > 1$ , a la función de Weierstrass, la denotamos y la definimos de la siguiente manera:

$$w(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \sin(\lambda^i t)$$

Es posible demostrar que la función anterior no es diferenciable en ningún punto de su dominio y que tiene  $\dim_H(\text{Graf}(W)) = s$ . A continuación mostramos su gráfica para diferentes valores de  $s$  y  $\lambda$ .

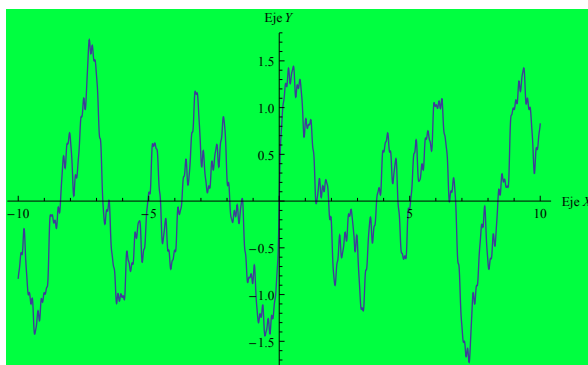


Figura 4.1: Gráfica de la función de Weierstrass con  $s = 1.2$ ,  $\lambda = 1.5$  y 10 sumandos.

Si comenzamos a aumentar la cantidad de sumandos, y los valores de  $s$  y  $\lambda$ , la irregularidad se hace mas notoria y cada vez aparecen mas esquinas y puntas; lo cual geometricamente significa que la función de Weierstrass no es diferenciable. A continuación mostramos un conjunto de gráficas modificando los

valores  $s$  y  $\lambda$ .

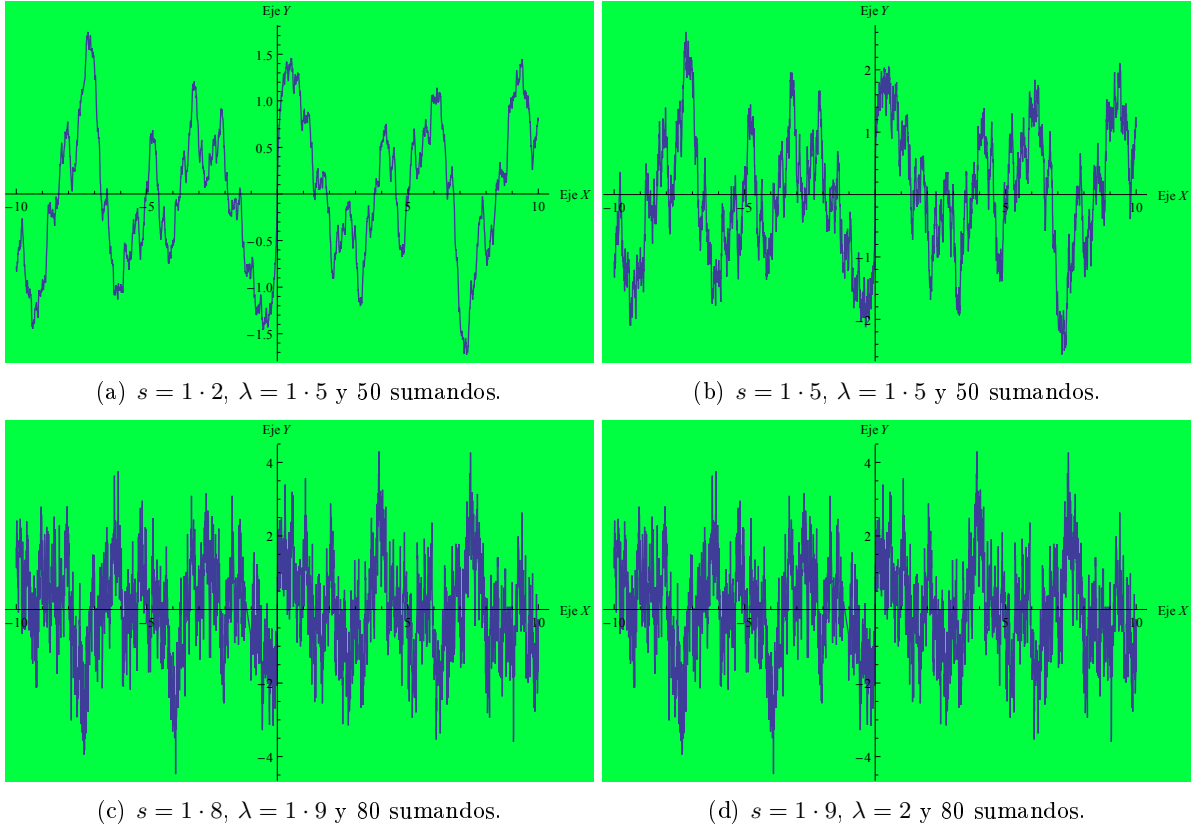


Figura 4.2: Gráfica de la función de Weierstrass para diferentes valores de  $s$  y  $\lambda$ .

A las gráficas anteriores se les puede generar utilizando el software científico **Mathematica** de la siguiente manera:

Como  $W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \sin(\lambda^i t)$  y es imposible considerar infinitos sumandos definimos la función en Mathematica de la siguiente manera:

$$W[t_, k_, s_, \lambda_] := \sum_{i=1}^k \lambda^{(s-2)*i} \text{Sin}[\lambda^i * t];$$

[seno]

Y luego leemos la entrada presionando en simultáneo **Shift** + **Enter**, posteriormente para obtener la gráfica digitamos:

```
Plot[W[t, 10, 1.2, 1.5], {t, -10, 10}, AxesLabel -> {Eje X, Eje Y}]
```

[representación gráfica] [etiqueta de ejes]

Notemos que podemos cambiar los valores de  $k$ ,  $s$  y  $\lambda$  y por supuesto la variación de  $t$ .

Una construcción análoga fué propuesta por el gran matemático alemán **Bernard Riemann**, su función es parecida a la de Weierstrass y se define de la siguiente manera:

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 \pi t)}{n^2}$$

Al igual que en la función de Weierstrass para su visualización gráfica definimos en Mathematica:

$$B[t_, k_] := \sum_{i=1}^k \frac{\text{Sin}[i^2 * \text{Pi} * t]}{i^2}$$

Y luego leemos la entrada presionando en simultáneo **Shift** + **Enter**, posteriormente para obtener la gráfica digitamos:

`Plot[B[t, 10], {t, -5, 5}, AxesLabel -> {Eje X, Eje Y}]`  
[representación gráfica]      [etiqueta de ejes]

Obteniendo como resultados:

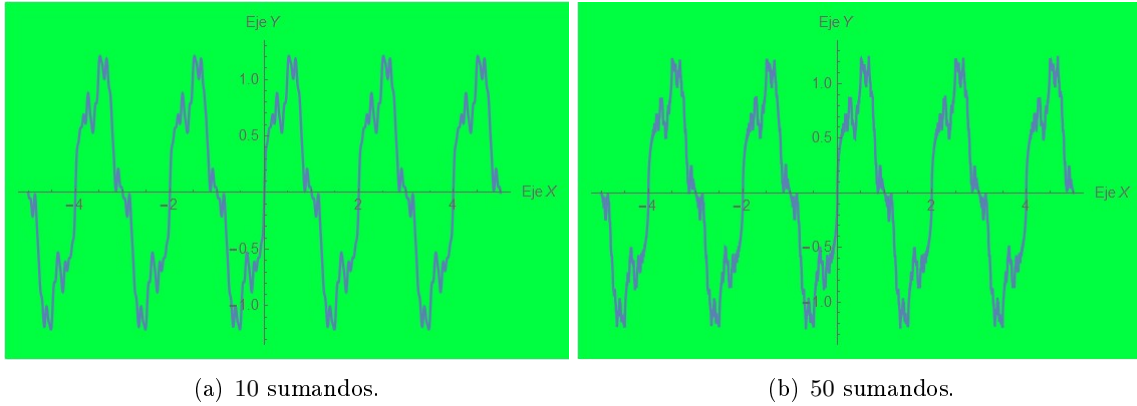


Figura 4.3: Gráfica de la función de Riemann para diferentes valores de  $k$ .

Una construcción análoga a las anteriores fué propuesta por el matemático japonés **Teiji Tagaki** a partir de la función conocida como **tienda de campaña**. Dicha función se define en el intervalo  $[0, 1]$  mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Extendida por periodicidad por todo  $\mathbb{R}$ .

La gráfica de la función anterior es:

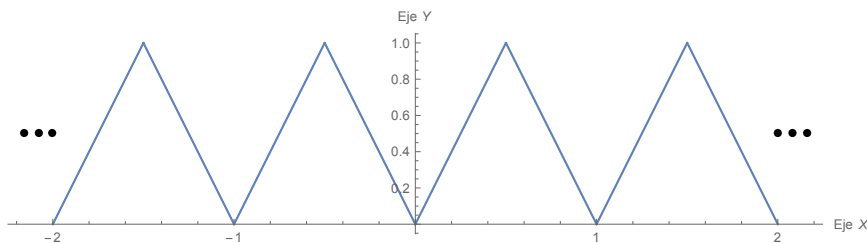


Figura 4.4: Gráfica de la función Tienda de Campaña extendida por periodicidad en  $\mathbb{R}$ .

Similar a la definición de Weierstrass para  $W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \sin(\lambda^i t)$ , Tagaki propuso su función mediante:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

Para graficarla con Mathematica, en primer lugar definimos:

```
f[x_] := Piecewise[Partition[Flatten[Table[{{2 (x - i), i ≤ x ≤  $\frac{2i+1}{2}$ }, {2 - 2 (x - i),  $\frac{2i+1}{2}$  < x ≤ i + 1}}, {i, 0, 100}], 2]]
```

Luego leemos la función anterior y posteriormente se define el comando:

```
T[k_] := Plot[Sum[ $\frac{f[2^i x]}{2^i}$ , {i, 0, k}], {x, 0, 1}, AxesLabel → {Eje X, Eje Y}]
```

De esta manera si ejecutamos el comando anterior para diferentes valores de  $k$  obtenemos las siguientes imágenes:

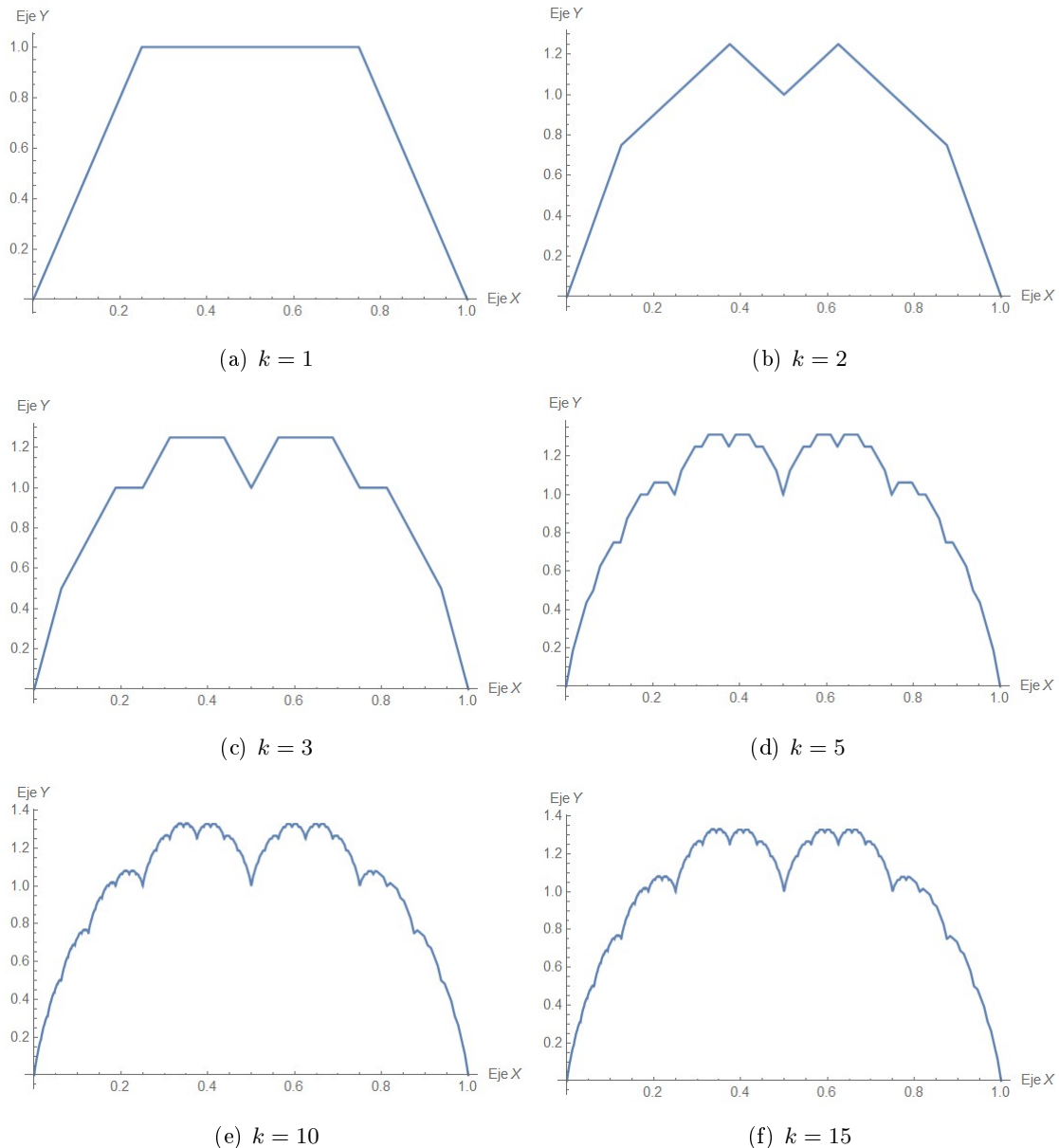


Figura 4.5: Gráfica de la función de Tagaki para diferentes valores de  $k$ .

## 4.2. El Operador de Read-Bajraktarevic

El Operador de Hutchinson juega un papel importante en la formalización de Conjuntos Fractales; análogo al Operador de Hutchinson se puede construir un operador que esté definido en un conjunto cuyos elementos sean funciones. A dicho operador se le denomina **Operador de Read-Bajraktarevic** y actúa sobre el espacio  $C(X, Y)$  donde  $X$  es un intervalo cerrado e  $Y$  es un espacio métrico completo. En el presente capítulo seguiremos la formalización que utiliza Peter Massopoust en su texto **Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets**.

Habiendo comprendido la idea fundamental de la construcción de Conjuntos Fractales, al parecer estamos en la capacidad de extender nuestra teoría en la construcción de **Funciones Fractales**, la idea es básicamente la misma, solo hay que buscar adecuadamente un **Operador Contractivo**, que actúe sobre cierto Espacio Métrico Completo.

**Definición.** Sean  $X$  un conjunto,  $Y$  un espacio métrico completo,  $b : X \rightarrow X$  una función arbitraria y  $v(x, y) : Y \rightarrow Y, x \in X$  una contracción. El operador asociado con  $b$  y  $\{v(x, \cdot)/x \in X\}$ , definido mediante:

$$\Phi : L^\infty(X, Y) \rightarrow L^\infty(X, Y)$$

$$f \rightarrow v(\cdot, f(b(\cdot)))$$

Es llamado el operador de Read-Bajraktarevic.

Con la finalidad de construir funciones fractales es importante que  $b : X \rightarrow X$  y  $v(x, \cdot) : Y \rightarrow Y$ , satisfagan ciertas condiciones, que a continuación describimos:

1. Debe existir una colección de " $N$ " biyecciones  $u_i : X \rightarrow X$  tales que:

$$\{X_i = u_i(X) : i = 1, \dots, N\}$$

Es una partición de  $X$ . Es decir:  $X = \bigcup_{n=1}^N X_i$

Luego a partir de esta condición es posible escribir " $b$ " mediante:

$$b(x) = \sum_{i=1}^N u_i^{-1}(x) \chi_{X_i}(x)$$

Asimismo podremos escribir a  $v(x, \cdot)$  de la siguiente manera:

$$v(x, \cdot) = \sum_{i=1}^N v_i(x, \cdot) \chi_{X_i}(x)$$

2. Existe una familia de funciones continuas  $\mathfrak{F}(X, Y)$  tal que para toda función  $f \in \mathfrak{F}(X, Y)$ , las funciones  $v_i(\cdot, f \circ b(\cdot)), i = 1 \dots N$  son miembros de  $\mathfrak{F}(X, Y)$ .

Analizando las condiciones anteriores podemos escribir al operador de Read-Bajraktarevic de la siguiente manera:

$$\Phi[f(x)] = \sum_{i=1}^N [v_i(u_i^{-1}(x), f(u_i^{-1}(x)))] \chi_{X_i}(x)$$

Donde:  $X_i = u_i(X)$ .

Al punto fijo del operador anterior se le denomina Función Fractal y es el punto de convergencia de la sucesión  $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ , con  $f_0$  dada inicialmente.

A continuación presentamos algunos ejemplos concretos, con la finalidad de familiarizarnos con la estructura matemática de la construcción anterior.

■ **Ejemplo. 4.1** Sea  $X = [0, 1]$  e  $Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ , considere las biyecciones  $u_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , definidas por:

$$u_1(x) = \frac{x}{2}, \quad u_2(x) = 1 - \frac{x}{2}$$

Asimismo considere los mapeos:

$$v_1(x, y) = x + \frac{3}{4}y, \quad v_2(x, y) = x^2 + \frac{3}{4}y$$

El operador de Read-Bajraktarević asociado con las biyecciones  $u_1, u_2$  y los mapeos  $v_1(x, y), v_2(x, y)$  viene dado por:

$$\Phi[f(x)] = \begin{cases} u_1^{-1}(x) + \frac{3}{4}f(u_1^{-1}(x)), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ u_2^{-1}(x) + \frac{3}{4}f(u_2^{-1}(x)), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Es decir:

$$\Phi[f(x)] = \begin{cases} 2x + \frac{3}{4}f(2x) & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2 - 2x)^2 + \frac{3}{4}f(2 - 2x) & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Al igual que en conjuntos fractales clásicos la construcción es iterativa, es decir empezamos con una función semilla  $f_0$  en  $C([0, 1], \mathcal{H}(\mathbb{R}))$ ,  $f_1 = \Phi(f_0)$ ,  $f_2 = \Phi(f_1)$  y así sucesivamente.

En el presente ejemplo si empezamos con la función  $f_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ , se obtiene:

$$f_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$$

$$f_1 = \Phi[f_0] = \{(0, 0), (\frac{1}{2}, 1), (1, 0)\}$$

$$f_2 = \Phi[f_1] = \{(0, 0), (\frac{1}{4}, \frac{5}{4}), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{3}{4}, 1), (1, 0)\}$$

$$f_3 = \Phi[f_2] = \{(0, 0), (\frac{1}{8}, \frac{19}{16}), (\frac{1}{4}, \frac{5}{4}), (\frac{3}{8}, \frac{3}{2}), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{5}{8}, \frac{21}{16}), (\frac{3}{4}, 1), (\frac{7}{8}, 1), (1, 0)\}$$

El punto fijo del operador anterior es una función fractal cuyas gráficas de formación se muestran a continuación.

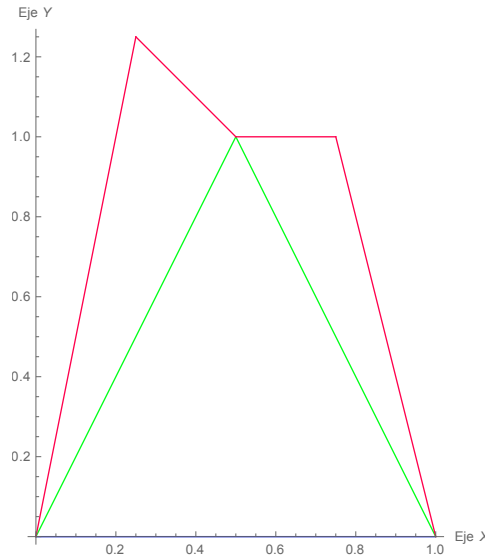


Figura 4.6: Segunda y Tercera Iteración

Si continuamos iterando se obtienen las siguientes gráficas

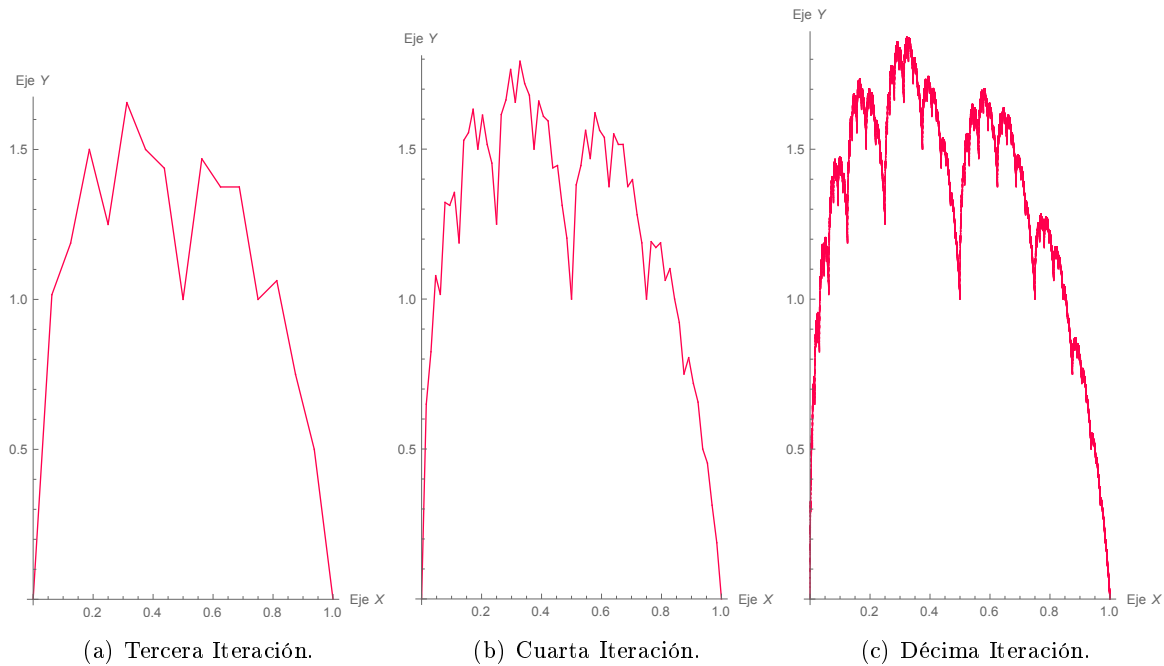


Figura 4.7: Convergencia hacia el punto fijo del operador.

**Ejemplo 02.** Considere el conjunto  $X = [0, 1]$ ,  $Y$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ . Defínase sobre  $X$ , las biyecciones  $u_1(x) = \frac{x}{2}$ ,  $u_2(x) = \frac{x+1}{2}$ . Por otro lado considere los mapeos  $v_i(x, \cdot) : [0, 1] \times Y \rightarrow Y$ , para los cuales  $v_1(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}y$  y  $v_2(x, y) = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{4}y$ . El operador asociado a  $u_1, u_2, v_1$  y  $v_2$  viene dado por:

$$\Phi[f(x)] = \begin{cases} x + \frac{1}{4}f(2x), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x + \frac{1}{4}f(2x - 1) & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

En este caso si  $f_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ , entonces:

$$f_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$$

$$f_1 = \Phi[f_0] = \{(0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 0)\}$$

$$f_2 = \Phi[f_1] = \{(0, 0), (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{8}), (1, 0)\}$$

$$f_3 = \Phi[f_2] = \{(0, 0), (\frac{1}{8}, \frac{7}{32}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}), (\frac{3}{8}, \frac{15}{32}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{5}{8}, \frac{15}{32}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{8}), (\frac{7}{8}, \frac{7}{32}), (1, 0)\}$$

La manera de como se va formando el punto fijo del operador se aprecia de la siguiente manera:

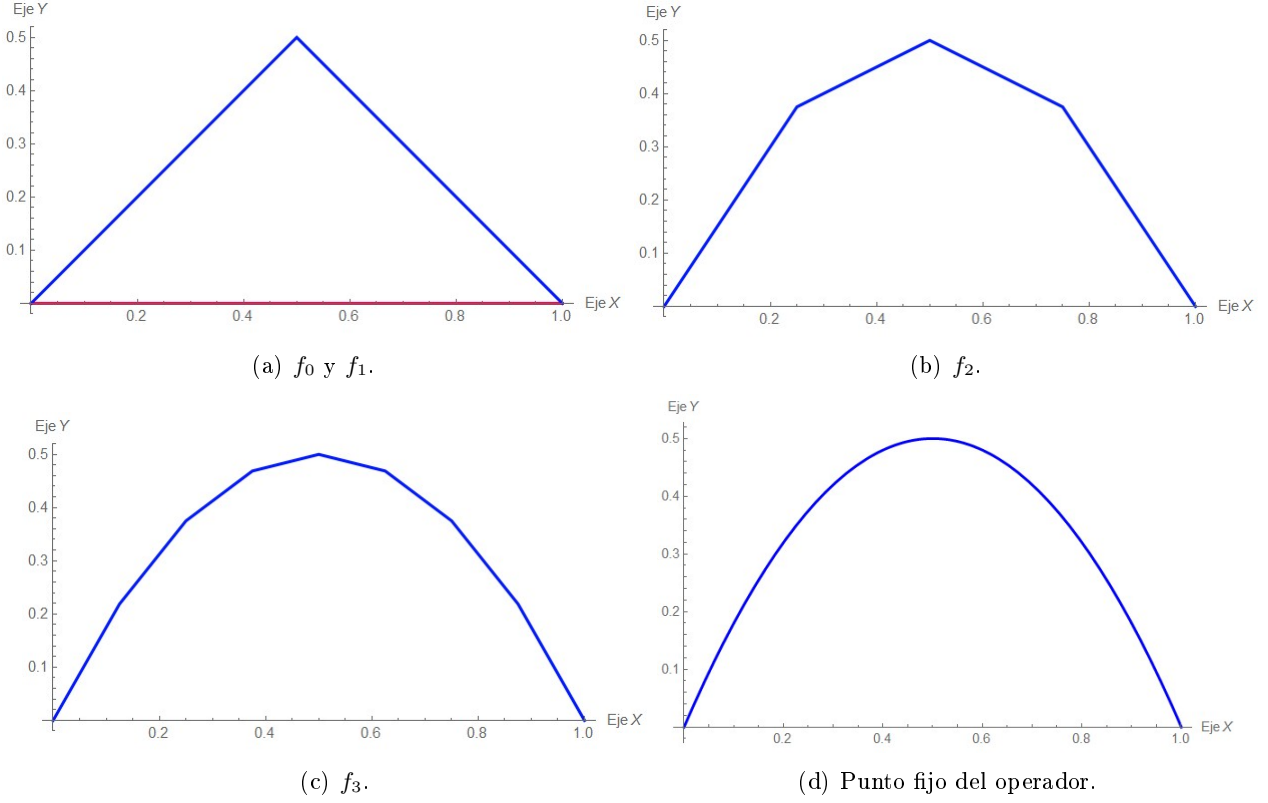


Figura 4.8: Convergencia hacia el punto fijo del operador.

No es difícil darnos cuenta a partir de las gráficas anteriores que el punto fijo del operador es una función suave cuya regla de correspondencia es:  $f_\Phi(x) = 2x(1 - x)$ .

Una forma de demostrar la afirmación anterior es utilizando ecuaciones funcionales. En efecto: Sea  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , como  $f$  debe ser el punto fijo del operador, entonces:

$$\phi[f(x)] = f(x)$$

Es decir:

$$f(x) = x + \frac{1}{4}f(2x)$$

Luego:

$$x + \frac{1}{4}[a(2x)^2 + b(2x) + c] = ax^2 + bx + c$$

Esto implica que:

$$ax^2 + (\frac{1}{2}b + 1)x + \frac{1}{4}c = ax^2 + bx + c$$



De donde:  $b = 2$  y  $c$  debe ser 0. Así pues  $f(x) = ax^2 + 2x$ .

Por otro lado debe cumplirse la igualdad:

$$x + \frac{1}{4}f(2x) = 1 - x + \frac{1}{4}f(2x - 1)$$

En  $x = \frac{1}{2}$  para asegurar la continuidad. Por tanto:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}f(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}f(0)$$

Esto conlleva a que  $f(1) = f(0)$ , entonces  $a + 2 = 0$ , por consiguiente  $a = -2$ . De esta manera el punto fijo del operador será  $f(x) = -2x^2 + 2x$ ; es decir:

$$f_{\Phi}(x) = 2x(1 - x)$$

### 4.3. Funciones en base a IFS interpolantes

En la presente sección construiremos funciones fractales en base al método general, es decir funciones fractales como puntos fijos del ya conocido Operador de Hutchinson. Aquí se utilizará dos transformaciones contractivas de la forma:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f) \\ w_2(x, y) = (gx + hy + i, jx + ky + l) \end{cases}$$

Los coeficientes  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$  y  $l$  se determinan teniendo en cuenta cinco puntos base que se tomen en el plano, luego se evalúan las transformaciones anteriores iterativamente en el segmento de recta formado por el primer y último punto que se tome; evidentemente para la evaluación se ha construido un programa en Mathematica.

Lo interesante es que se puede generar la Curva de Von Koch, utilizando sólo estas dos transformaciones cuando lo normal para generarla es un IFS compuesta de cuatro transformaciones. La construcción de las transformaciones se lleva a cabo de la siguiente manera:

Considere cinco puntos del plano  $P_1(p_1, q_1)$ ,  $P_2(p_2, q_2)$ ,  $P_3(p_3, q_3)$ ,  $P_4(p_4, q_4)$  y  $P_5(p_5, q_5)$  distribuidos de la siguiente manera:

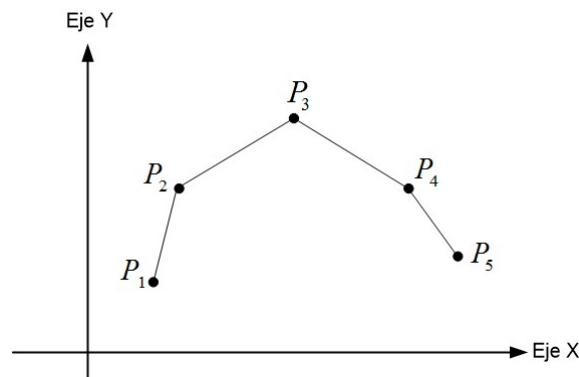


Figura 4.9: Distribución de puntos en el plano para una función fractal interpolante.

Si evaluamos las transformaciones anteriores en los puntos, teniendo en cuenta que:

$$\begin{cases} w_1(P_1) = P_1 \\ w_1(P_3) = P_2 \\ w_1(P_5) = P_3 \end{cases}$$

Se originan los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} p_1a + q_1b + c = p_1 \\ p_3a + q_3b + c = p_2 \\ p_5a + q_5b + c = p_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1d + q_1e + f = q_1 \\ p_3d + q_3e + f = q_2 \\ p_5d + q_5e + f = q_3 \end{cases}$$

Cuyo conjunto solución  $\{a, b, c, d, e, f\}$  hace posible que  $w_1$  defina una contracción. Análogamente, si hacemos que:

$$\begin{cases} w_2(P_1) = P_3 \\ w_2(P_3) = P_4 \\ w_2(P_5) = P_5 \end{cases}$$

Se originan los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} p_1g + q_1h + i = p_3 \\ p_3g + q_3h + i = p_4 \\ p_5g + q_5h + i = p_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1j + q_1k + l = q_3 \\ p_3j + q_3k + l = q_4 \\ p_5j + q_5k + l = q_5 \end{cases}$$

Cuyo conjunto solución  $\{g, h, i, j, k, l\}$  hace posible que  $w_2$  defina una contracción.

Luego, si consideramos la transformación:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \\ A &\rightarrow \Psi(A) = \bigcup_{i=1}^2 w_i(A) \end{aligned}$$

El punto fijo de  $\Psi$  define una función fractal, donde  $A$  es el segmento de recta que une los puntos  $P_1(p_1, q_5)$  y  $P_5(p_5, q_5)$ .

■ **Ejemplo. 4.2** Considere los puntos:  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(5, 7)$ ,  $P_3(10, 5)$ ,  $P_4(15, 7)$  y  $P_5(20, 0)$ .

Y considere las transformaciones:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f) \\ w_2(x, y) = (gx + hy + i, jx + ky + l) \end{cases}$$

Siguiendo el proceso explicado anteriormente resultan los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 10a + 5b + c = 5 \\ 20a + c = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} f = 0 \\ 10d + 5e + f = 7 \\ 20d + f = 5 \end{cases}$$

De donde resultan:  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $d = \frac{1}{4}$ ,  $e = \frac{9}{10}$  y  $f = 0$ .

Por otro lado:

$$\begin{cases} i = 10 \\ 10g + 5h + i = 15 \\ 20g + i = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} l = 5 \\ 10j + 5k + l = 7 \\ 20j + l = 0 \end{cases}$$

Resultando:  $g = \frac{1}{2}$ ,  $h = 0$ ,  $i = 10$ ,  $j = -\frac{1}{4}$ ,  $k = \frac{9}{10}$  y  $l = 5$ .

A partir de estos valores se tiene el siguiente **IFS**:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{4}x + \frac{9}{10}y) \\ w_2(x, y) = (\frac{1}{2}x + 10, -\frac{1}{4}x + \frac{9}{10}y + 5) \end{cases}$$

Si iteramos el IFS anterior en  $A = \{(0, 0), (20, 0)\}$  se generan las siguientes gráficas:

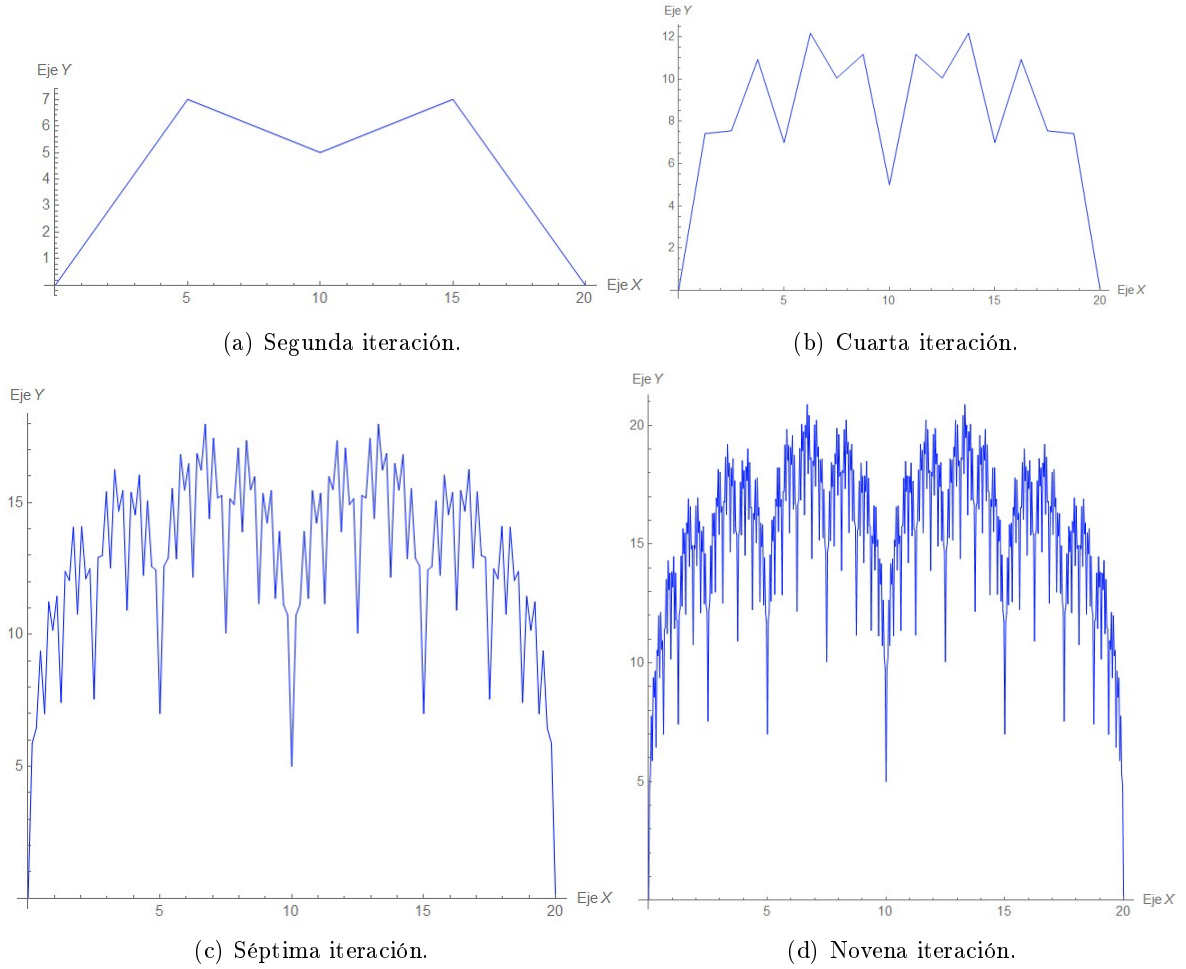


Figura 4.10: Convergencia hacia el punto fijo del operador.

■ **Ejemplo. 4.3** Si consideramos los puntos:  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(1,0)$ ,  $P_3(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $P_4(2,0)$  y  $P_5(3,0)$ .

Y consideramos las transformaciones:

$$\begin{cases} w_1(x,y) = (ax + by + c, dx + ey + f) \\ w_2(x,y) = (gx + hy + i, jx + ky + l) \end{cases}$$

Aunque no se genera una función fractal obtenemos una curva muy importante estudiada anteriormente denominada **Curva de Koch**, con la peculiaridad que para una iteración para obtenemos una variante de dicha curva. El **IFS** que se genera es:

$$\begin{cases} w_1(x,y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}y, \frac{1}{2\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}y) \\ w_2(x,y) = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}y + \frac{3}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

El cual al evaluarlo iterativamente en  $A = \{(0,0), (3,0)\}$  obtenemos las siguientes gráficas:

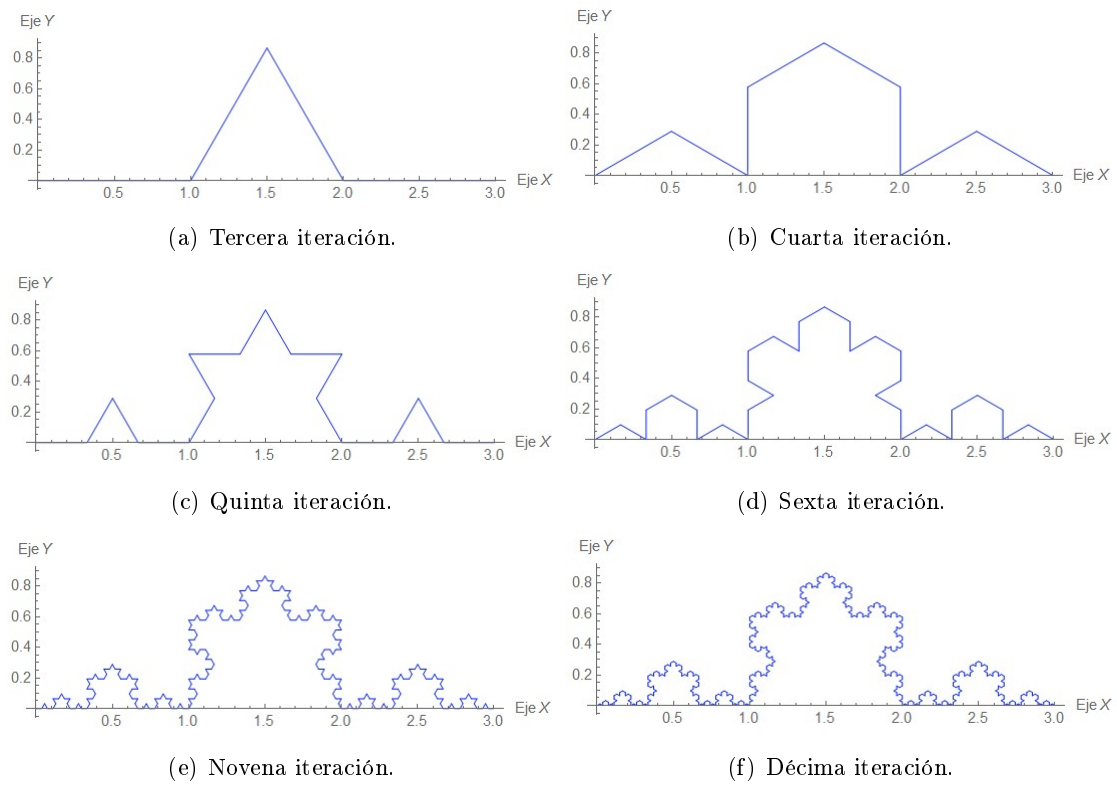


Figura 4.11: Curva de Koch con dos iteraciones.



## Capítulo 5

# Fractales en el plano complejo

Teniendo en cuenta los métodos iterativos en el Plano Complejo se pueden obtener Conjuntos Fractales muy interesantes, dicha construcción se debe a tres matemáticos muy famosos, a saber Pierre Fatou (1878-1929), Gaston Julia (1893-1978) y Benoit Mandelbroth (1924-2010)

### 5.1. Los Conjuntos de Fatou y Julia

Pierre Fatou y Gastón Julia trabajaron iterando polinomios cuadráticos en el plano complejo de la forma  $f(z) = z^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , obteniendo conjuntos fractales muy interesantes que justamente llevan su nombre.

**Definición. 5.1.1** Considere el punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $f$  un polinomio en el Plano Complejo. A la órbita del punto  $z_0$  bajo  $f$ , la denotamos y la definimos de la siguiente manera:

$$Orb_f(z_0) = \{z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots, f^n(z_0), \dots\}$$

**Definición. 5.1.2** Considere el polinomio complejo  $f(z) = z^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Definimos al conjunto de Fatou como el conjunto formado por todos los puntos del plano complejo cuyas órbitas no escapan al infinito.

Esto significa que si fijamos al número  $c \in \mathbb{C}$ , entonces el Conjunto de Fatou estará formado por todos aquellos puntos  $z$  del Plano Complejo, cuya órbita:

$$Orb_f(z) = \{z, z^2 + c, (z^2 + c)^2 + c, ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c, \dots\}$$

No escape al infinito.

Por ejemplo si  $c = 0 \cdot 1i$  y se nos pide averiguar si  $z = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5i$  pertenece al conjunto de Fatou, debemos encontrar la órbita del punto  $z$ , bajo la función  $f(z) = z^2 + 0 \cdot 1i$ . Luego:

$$Orb_f(0 \cdot 3 + 0 \cdot 5i) = \{0 \cdot 3 + 0 \cdot 5i, -0 \cdot 16 + 0 \cdot 4i, -0 \cdot 1344 - 0 \cdot 028i, 0 \cdot 0172794 + 0 \cdot 107526i, -0 \cdot 0112634 + 0 \cdot 103716i, \dots\}$$

Claramente observamos que la órbita no escapa al infinito, por tanto podemos decir que el punto  $z = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5i$  si forma parte del conjunto de Fatou.

■ **Ejemplo. 5.1** Considere el valor de  $c = 0$ . Entonces  $f(z) = z^2$ , luego teniendo en cuenta que cualquier número complejo del círculo  $|z| \leq 1$  al elevarlo al cuadrado no caerá fuera del círculo unidad, entonces podemos inferir que el Conjunto de Fatou para cuando  $c = 0$  es el círculo unidad.

■ **Ejemplo. 5.2** La órbita del punto  $z = 0 \cdot 3 - 0 \cdot 4i$  para  $c = 0$  bajo  $f(z) = z^2$  es:

$$\text{Orb}_f(0 \cdot 3 - 0 \cdot 4i) = \{0 \cdot 3 - 0 \cdot 4i, -0 \cdot 07 - 0 \cdot 24i, -0 \cdot 0527 + 0 \cdot 0336i, 0 \cdot 00164833 - 0 \cdot 00354144i, \dots\}$$

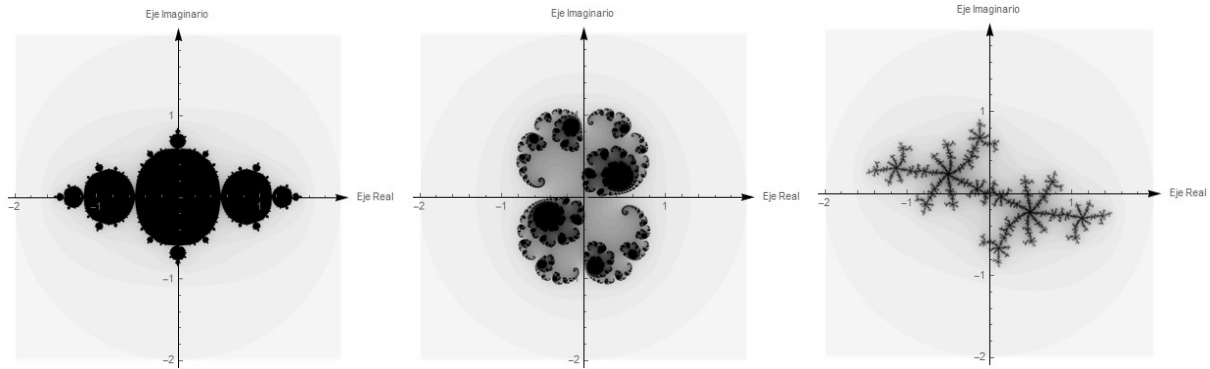
Y claramente no escapa al infinito.

A continuación presentamos algunas gráficas del Conjunto de Fatou para distintos valores de  $c$ , obtenidas a partir del siguiente código en Mathematica:

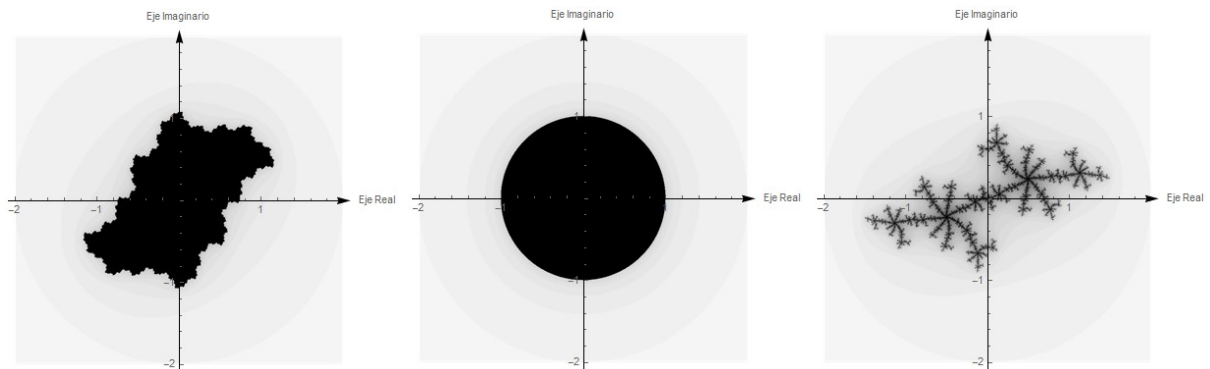
```
ConjuntoDeFatou[c_, paso_] := Module[{Plano, r, s, t, u},
  Plano = Compile[{{z, _Complex}}, Length[FixedPointList[#^2 + c &, z, 50, SameTest -> (Abs[#] > 2.0 &)]]];
  r = Table[Plano[-x + I y], {y, -2, 2, paso}, {x, -2, 2, paso}];
  t = ArrayPlot[r, Frame -> True, AspectRatio -> 1, FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}}, FrameLabel -> {Eje Imag, Eje Real},
    BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 18}, ImageSize -> 400, DataRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}];
  u = Graphics[Point[{0, 0}], Axes -> True, AxesLabel -> {Eje Real, Eje Imaginario}, AxesStyle -> Arrowheads[{0.04}]];
  Show[u, t]
```

Figura 5.1: Código en Mathematica para generar el conjunto de Fatou.

Si ejecutamos el programa anterior para distintos valores de  $c$  obtenemos las siguientes imágenes:



(a) Gráfica para  $c = -0 \cdot 8$ . (b) Gráfica para  $c = 0 \cdot 285 + 0 \cdot 01i$ . (c) Gráfica para  $c = -0 \cdot 689 + 0 \cdot 4626i$ .



(d) Gráfica para  $c = -0 \cdot 5i$ . (e) Gráfica para  $c = 0$ . (f) Gráfica para  $c = -0 \cdot 689 - 0 \cdot 4626i$ .

Figura 5.2: Gráficas del Conjunto de Fatou.



Podemos pintar la velocidad con la que los puntos escapan al infinito para poder visualizar en una gráfica a color que partes de la región del plano complejo escapan mas rápidamente; en ese caso debemos hacer una ligera modificación al programa anterior ingresando una función de color:

```
ConjuntoDeFatou[c_, paso_, f_] := Module[{Plano, r, s, t, u},
  |módulo

  Plano = Compile[{{z, _Complex}}, Length[FixedPointList[#^2 + c & , z, 50, SameTest -> (Abs[#] > 2.0 &)]]];
  |compila |constante |longitud |lista de resultados de punto fijo |criterio de igu... |valor absoluto

  r = Table[Plano[-x + I y], {y, -2, 2, paso}, {x, -2, 2, paso}];
  |tabla |número i

  CoolColor[a_] := Hue[f /. x -> a];
  |tonalidad

  t = ArrayPlot[r, ColorFunction -> CoolColor, Frame -> True, AspectRatio -> 1, FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
  |representación... |función de color |marco |verd... |cociente de aspecto |marcas del marco |automático |ninguno |automático |ninguno
  FrameLabel -> {Eje Imag, Eje Real}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 18}, ImageSize -> 400, DataRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}];
  |etiqueta de marco |real |estilo base |familia de tipo de letra |tamaño de tipo de ... |tamaño de imagen |rango de datos

  u = Graphics[Point[{0, 0}], Axes -> True, AxesLabel -> {Eje Real, Eje Imaginario}, AxesStyle -> Arrowheads[{0.04}]]];
  |gráfico |punto |ejes |verd... |etiqueta de ejes |real |estilo de ejes |cabeceras de flecha

  Show[u, t]
  |muestra
]
```

Figura 5.3: Código en Mathematica para generar el conjunto de Fatou a color.

Si ejecutamos el programa anterior para los distintos valores de  $c$  considerados en la figura anterior con  $f(x) = e^x$  obtenemos las siguientes imágenes:

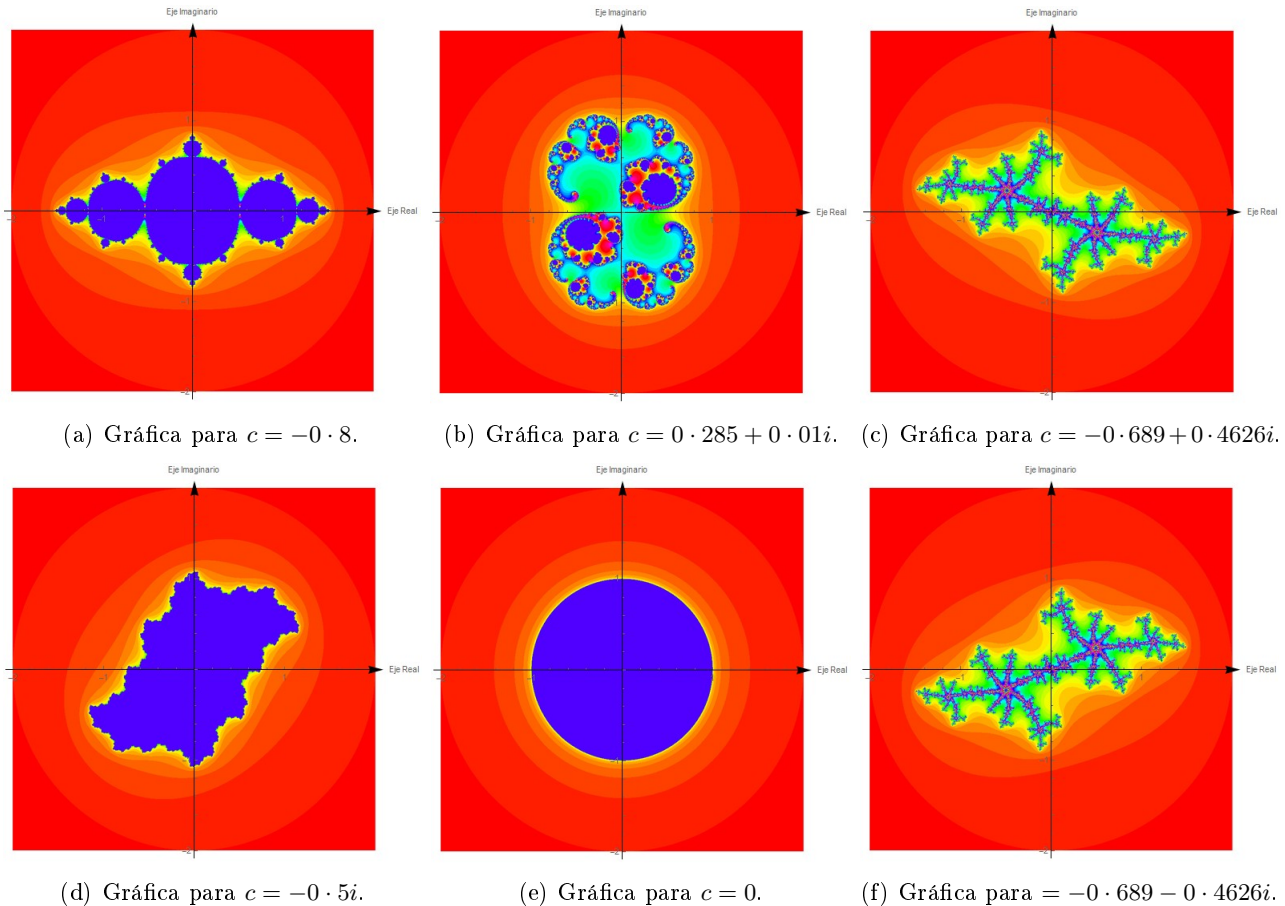


Figura 5.4: Gráfica de la velocidad con la que escapan los puntos al infinito.

En este caso, la región de azul corresponde a los puntos del conjunto de Fatou y el resto de colores ilustra la velocidad con la que los puntos del plano complejo escapan al infinito. De hecho, los puntos

de color más oscuro escapan mas rápidamente que los demás.

De hecho no solo se puede iterar polinomios cuadráticos, si se itera de la misma forma el polinomio  $f(z) = z^4 + c$ , obtenemos las siguientes imágenes:

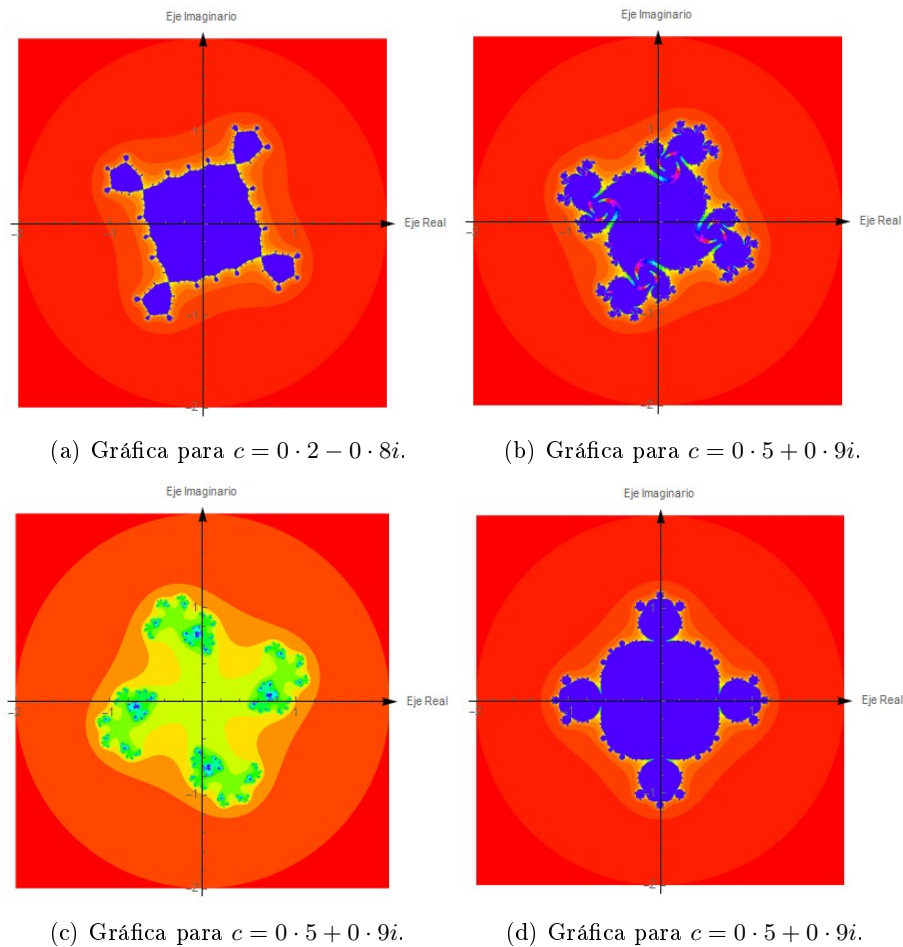


Figura 5.5: Gráficas del Conjunto de Julia con  $f(z) = z^4 + c$ .

**Definición. 5.1.3** Para ciertos valores de  $c$ , las órbitas de los puntos en un entorno del origen convergen a un punto fijo, mientras que las órbitas de los puntos más alejados del origen se van al infinito. Cada uno de estos tipos de puntos constituyen una región y en medio queda una frontera (infinitamente delgada), a la cual se le conoce con el nombre de Conjunto de Julia.

En **Mathematica** ya existe un comando que permite graficar la frontera que corresponde el conjunto de Julia, el comando es el siguiente:

```
JuliaSetPlot[c, ColorFunction -> None]
[representación de c] [función de color] [ninguno]
```

Sin embargo para que nos permita tener una mejor visualización creamos el comando:

```
Julia[c_] := JuliaSetPlot[c, ColorFunction -> None, Axes -> True, Frame -> False,
[representación de c] [función de color] [ninguno] [ejes] [verdadero] [marco] [falso]
AxesLabel -> {Eje Real, Eje Imaginario}, AxesStyle -> Arrowheads[{0.04}]]
[etiqueta de ejes] [real] [estilo de ejes] [cabeceras de flecha]
```

A continuación se muestran algunas gráficas del Conjunto de Julia, para algunos valores de  $c$  considerados en las gráficas anteriores:

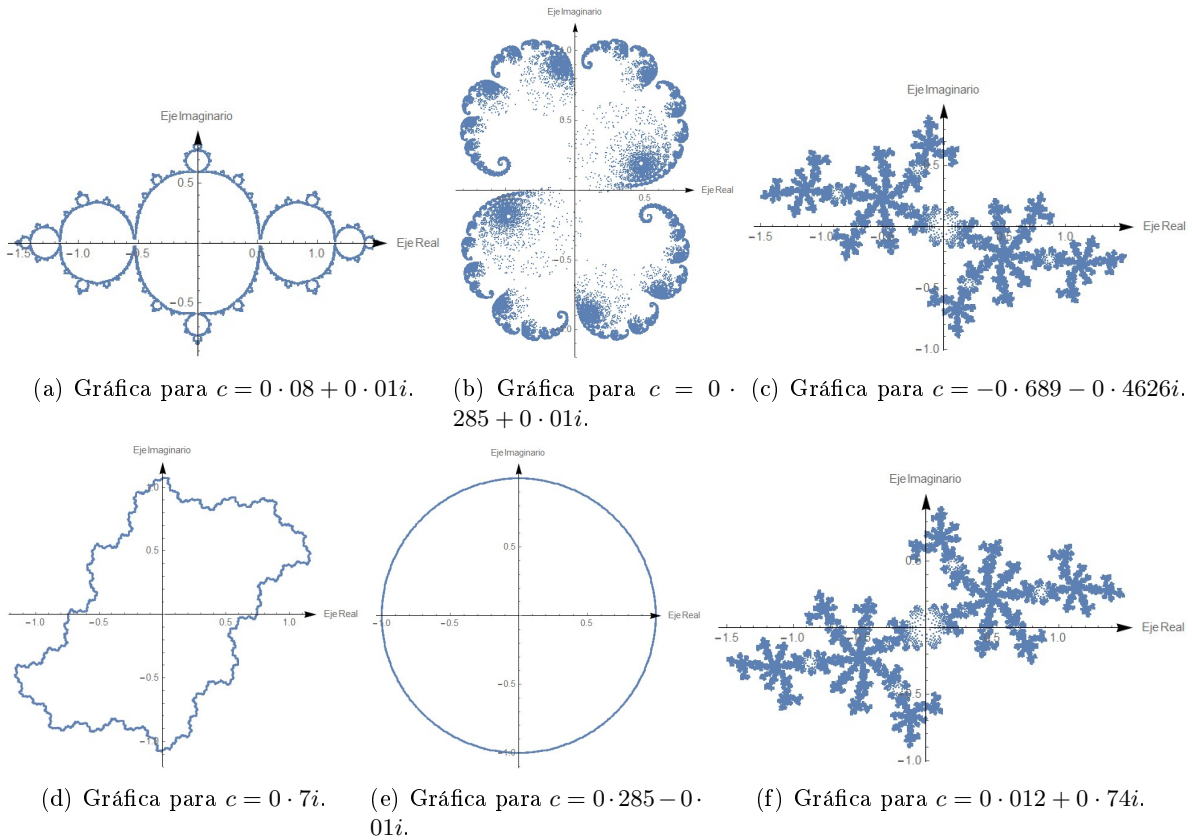


Figura 5.6: Gráficas del Conjunto de Julia.

## 5.2. El Conjunto de Mandelbroth

Cuando se itera los elementos del plano complejo para diferentes valores de  $c$  resulta que para algunos valores de  $c$  el conjunto de Julia resultante es conexo y para otros no. Luego al conjunto formado por todos los valores de  $c$ , para los cuales el conjunto de Julia es conexo se le denomina Conjunto de Mandelbroth. Simbólicamente se escribe de la siguiente manera:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(p_c) \text{ es conexo}\}$$

Recordemos que:

Un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  se dice que es inconexo (Shaum) si existen subconjuntos abiertos  $G$  y  $H$  de  $X$  tales que se verifica:

1.  $A \cap G \neq \emptyset$  y  $A \cap H \neq \emptyset$
2.  $(A \cap G) \cap (A \cap H) = \emptyset$
3.  $A = (A \cap G) \cup (A \cap H)$

A partir de aquí un conjunto es conexo si no es inconexo; es decir la idea de **Conexidad** es que el conjunto se compone de una sola pieza.

Para generar gráficas del conjunto de Mandelbroth ejecutamos el programa en mathematica:

```

ConjuntoDeMandelbrot[paso_, f_] := Module[{Plano, r, s, t, u}, z = 0;
  Plano = Compile[{{z, _Complex}, {c, _Complex}},
    If[c == z, Length[FixedPointList[#^2 + c &, z, 50, SameTest -> (Abs[#] > 2.0 &)]]];
  r = Table[Plano[x + I y, x + I y], {y, -2, 2, paso}, {x, -2, 2, paso}];
  CoolColor[a_] := Hue[f /. x -> a];
  t = ArrayPlot[r, ColorFunction -> CoolColor, Frame -> True, AspectRatio -> 1,
    FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}}, FrameLabel -> {Eje Imag, Eje Real},
    BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 18}, ImageSize -> 400,
    DataRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}];
  u = Graphics[Point[{0, 0}], Axes -> True, AxesLabel -> {Eje Real, Eje Imaginario},
    AxesStyle -> Arrowheads[{0.04}]]; Show[u, t]
]

```

A continuación se presenta la gráfica del Conjunto de Mandelbroth.

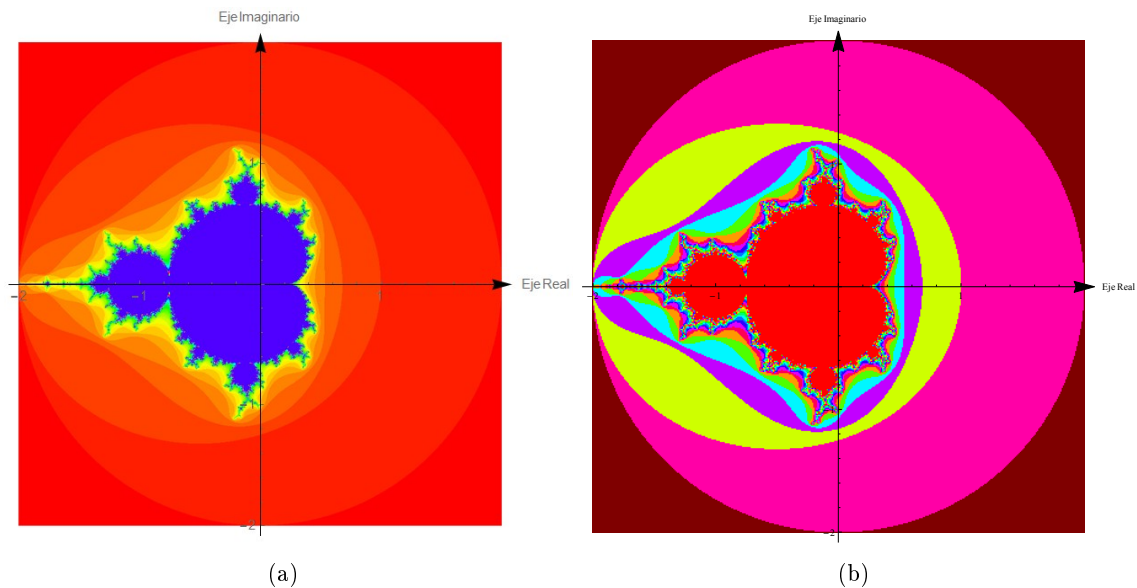


Figura 5.7: Gráfica del Conjunto de Mandelbroth para  $f(z) = z^2 + c$ .

Geométricamente podemos apreciar que el Conjunto de Mandelbroth se compone de la unión de Conjuntos de Julia.

## Capítulo 6

# Transformaciones complejas en fractales clásicos

En el capítulo 2, dijimos que la existencia de conjuntos fractales clásicos tales como el Conjunto de Cantor, Triángulo de Sierpinski, Alfombra de Sierpinski, Curva de Koch, etc, se fundamenta en base al ***Operador de Hutchinson***, el cual actúa sobre el conjunto de subconjuntos compactos de un espacio métrico. A partir de estos conjuntos, se pueden obtener nuevos conjuntos fractales mapeando dichas estructuras mediante funciones de variable compleja; esto es posible gracias a que ciertas funciones de variable compleja cumplen con la condición de Lipschitz y en base a esta propiedad es posible determinar una cota superior para la dimensión de la imagen. Su visualización ha sido posible gracias al software científico *Mathematica*.

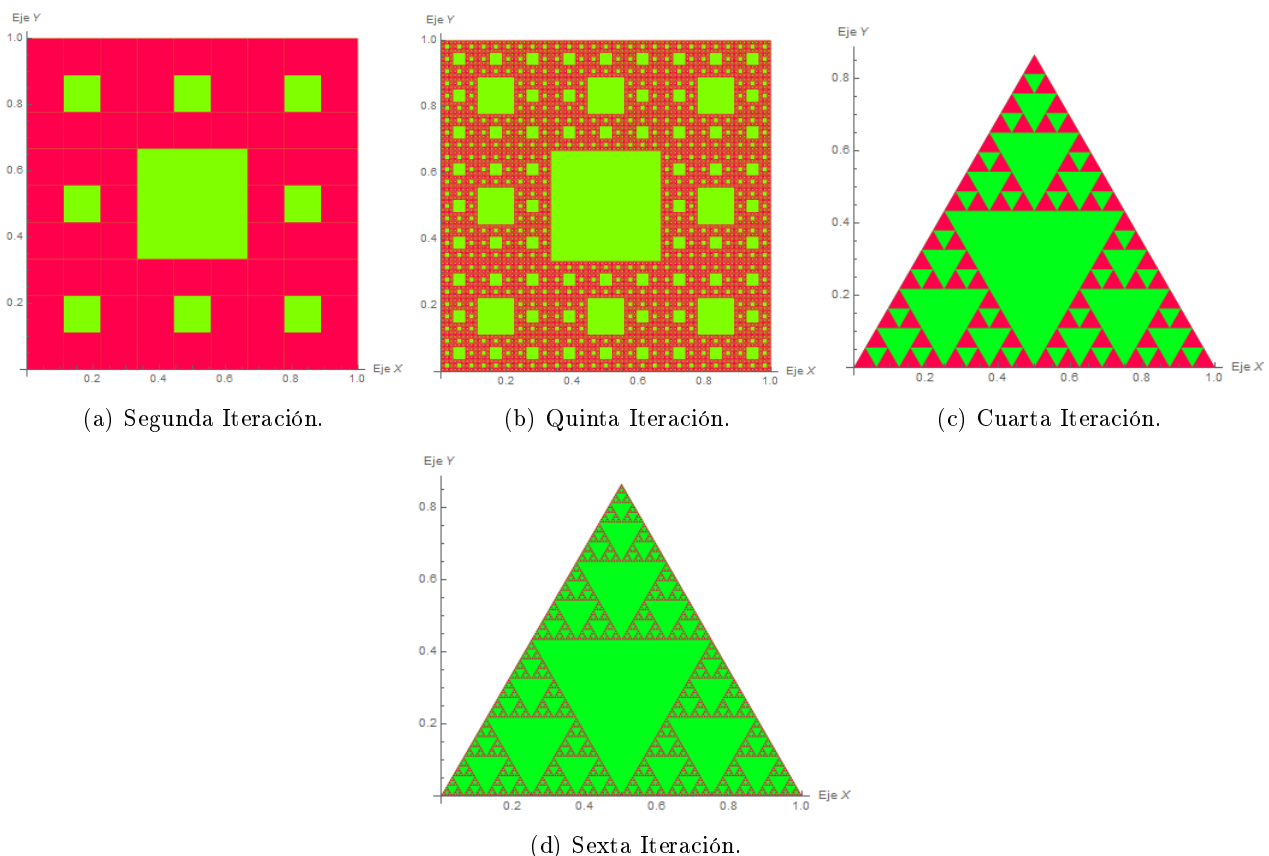


Figura 6.1: La alfombra y triángulo de Sierpinski.

Si mapeamos las imágenes anteriores bajo una transformación compleja polinomial se obtienen nuevas imágenes que posiblemente son fractales.

## 6.1. Mapeos Polinomiales

Los mapeos polinomiales de variable compleja tienen la característica especial de mapear rectas horizontales y verticales en curvas planas del mismo grado; razón por la cual las imágenes que resultan son parábolas, parábolas cúbicas y en general curvas del mismo grado. A continuación describimos los efectos geométricos de los mapeos cuadráticos, cúbicos y de cuarto grado.

En el caso del mapeo cuadrático rectas horizontales se mapean en parábolas de eje horizontal que se abren hacia la derecha y rectas verticales en parábolas horizontales que se abren hacia la izquierda, mientras que la recta horizontal  $x = 0$  y  $y = 0$  se mapean en rectas como las que se indican en la figura

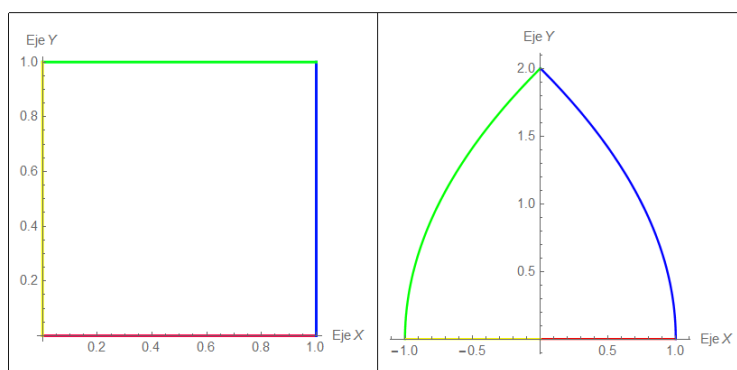


Figura 6.2: Imagen de la frontera de un cuadrado bajo la función  $f(z) = z^2$ .

Para la función cúbica  $f(z) = z^3$  tanto las rectas horizontales como verticales se convierten en curvas con lazos verticales y horizontales respectivamente; mientras que las rectas horizontales y verticales que pasan por el origen también son horizontales y verticales.

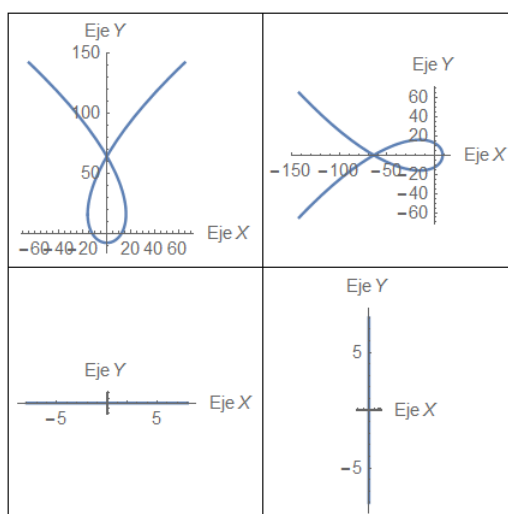


Figura 6.3: Imágenes de rectas horizontales y verticales bajo  $f(z) = z^3$ .

En el caso de la frontera del cuadrado unidad se obtiene lo siguiente



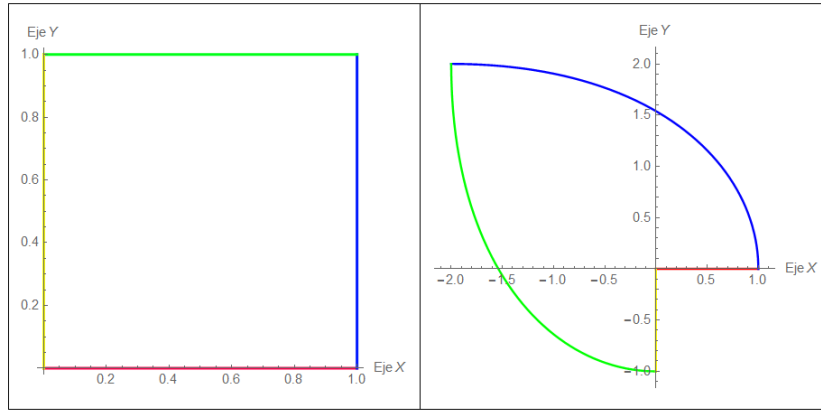


Figura 6.4: Imagen de la frontera de un cuadrado bajo la función  $f(z) = z^3$ .

Analogamente para el caso de la función  $f(z) = z^4$ , también se generan lazos, pero al restringirse al cuadrado unidad se obtiene la siguiente imagen

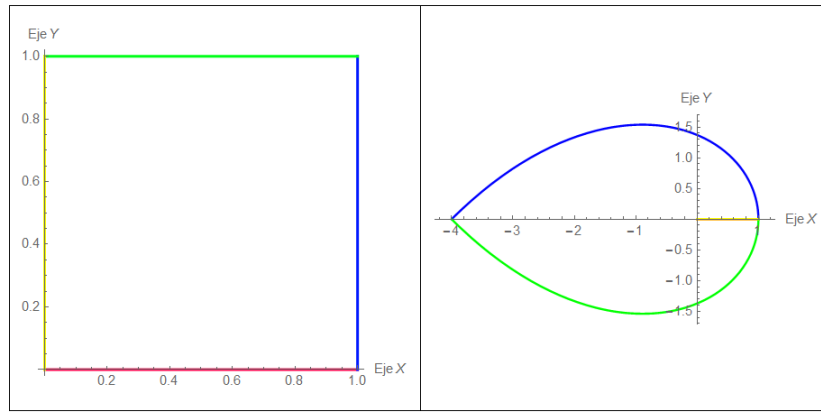


Figura 6.5: Imagen de la frontera de un cuadrado bajo la función  $f(z) = z^4$ .

A partir de las gráficas anteriores podemos observar que si se mapea un cuadrado del plano  $z$  bajo la función  $f(z) = z^n$  obtenemos una región acotada en el plano  $w$ .

## 6.2. La construcción

Un punto que requiere de especial análisis es la formalización de las imágenes que se obtengan al mapear un fractal clásico bajo una transformación compleja polinomial. A continuación describimos algunos resultados que nos permiten concluir que las imágenes que se obtienen, efectivamente son conjuntos fractales.

**Definición. 6.2.1 – Función local de Lipschitz..** (Perko[5, Def. 2 pag 71.]) Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto.  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  es llamada una función localmente de Lipschitz sobre  $E$ , si para cada punto  $x_0 \in E$  existe una  $\epsilon$ -vecindad de  $x_0$ ,  $N_\epsilon(x_0) \subset E$  y una constante  $K_0 > 0$  tal que  $\forall x, y \in N_\epsilon(x_0)$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K_0 \|x - y\|$$

**Lema.**(Perko[5, pág 71.]) Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces si  $f \in C^1(E)$ ,  $f$  es localmente de Lipschitz.

**Proposición 6.1** (Falconer[1, Proposición 2.3 ]). Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  y supongamos que  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface la condición de Holder:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|^\alpha, \forall x, y \in F$$

$$\text{Entonces: } \dim_H f(F) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \dim_H F$$

En particular si  $f$  es de Lipschitz entonces  $\alpha = 1$  y se verifica que:

$$\dim_H f(F) \leq \dim_H F$$

A partir de las definiciones y resultados anteriores, las funciones polinomiales de variable compleja son funciones localmente de Lipschitz; por tanto podemos afirmar que las imágenes de un fractal clásico bajo este tipo de funciones son también fractales.

**Observación 6.1** Las funciones de variable compleja polinomial, tales como:  $f(z) = z^2$ ,  $f(z) = z^3$ , etc son de lipschitz en el sentido de que a cada una de ellas las podemos definir como una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ; esta forma de definir las nos ayudará a poder aplicar los diferentes resultados propuestos anteriormente.

En efecto, las funciones cuadrática, cúbica y de grado cuatro, se pueden expresar mediante:

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3), f(x, y) = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3)$$

Cada una de las funciones anteriores son de clase  $C^1(E)$  en cualquier abierto  $E$ , y por el lema anterior dichas funciones son localmente de Lipschitz.

■ **Ejemplo. 6.1** Considere el conjunto  $F$  a la Alfombra de Sierspinski, al mapear las diferentes iteraciones correspondientes a  $F$  bajo  $f(z) = z^2$ ,  $f(z) = z^3$  y  $f(z) = z^4$  se obtienen las siguientes imágenes:

Bajo  $f(z) = z^2$ :

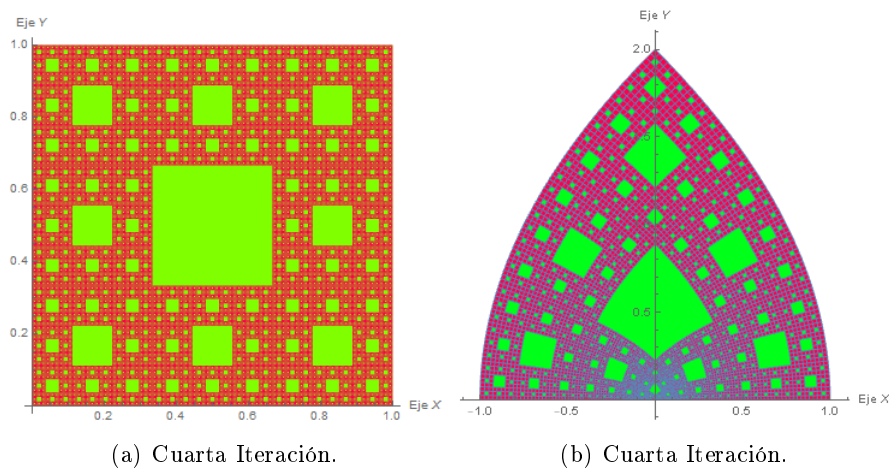


Figura 6.6: Imagen del mapeo de la Alfombra de Sierspinski bajo  $f(z) = z^2$ .

Al mapear la Alfombra de Sierspinski bajo  $f(z) = z^3$  obtenemos:



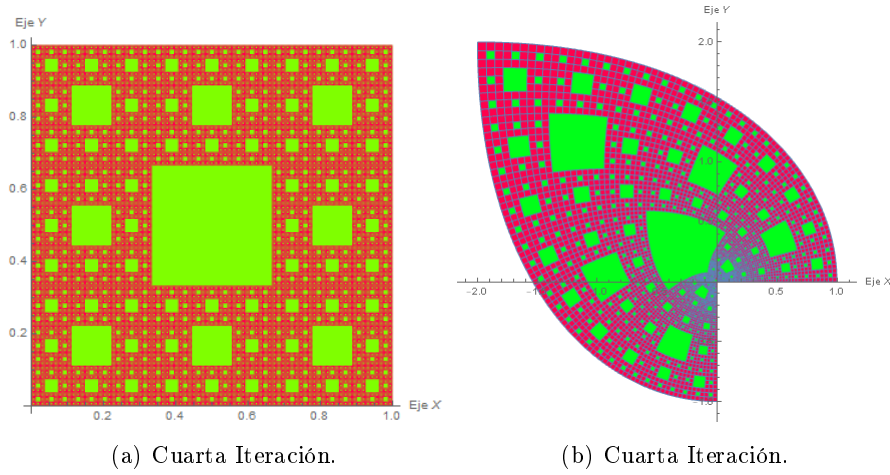


Figura 6.7: Imagen del mapeo de la Alfombra de Sierpinski bajo  $f(z) = z^3$ .

Y mediante  $f(z) = z^4$ , se obtiene:

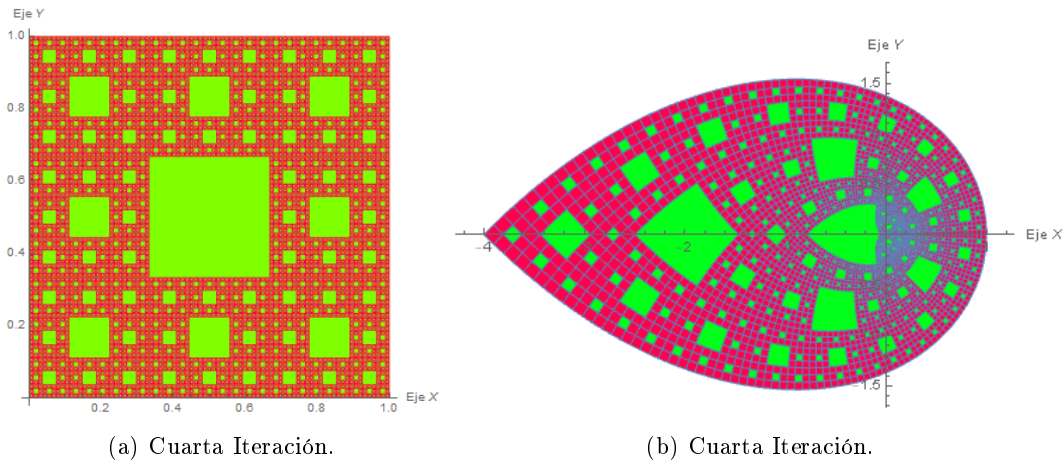


Figura 6.8: Imagen del mapeo de la Alfombra de Sierpinski bajo  $f(z) = z^4$ .

■ **Ejemplo. 6.2** Considere el conjunto  $F$  al Triángulo de Sierpinski, al mapear las diferentes iteraciones correspondientes a  $F$  bajo  $f(z) = z^2$ ,  $f(z) = z^3$  y  $f(z) = z^4$  se obtienen las siguientes imágenes:

Bajo  $f(z) = z^2$ :

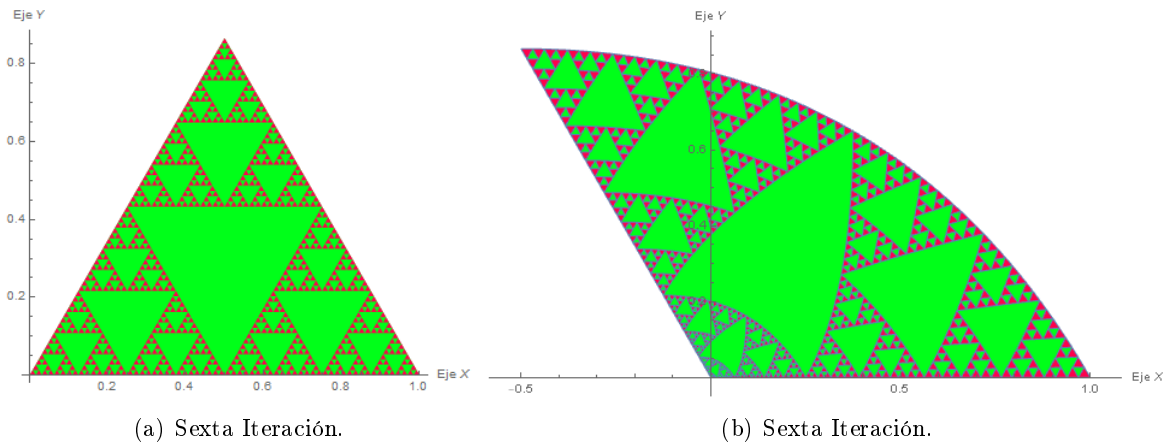


Figura 6.9: Imagen del mapeo del Triángulo de Sierpinski bajo  $f(z) = z^2$ .

Bajo  $f(z) = z^3$ :

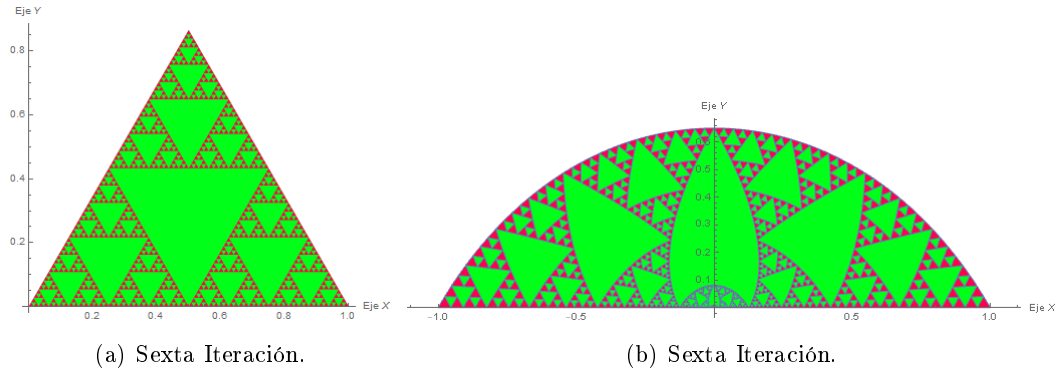


Figura 6.10: Imagen del mapeo del Triángulo de Sierpinski bajo  $f(z) = z^3$ .

Bajo  $f(z) = z^4$ :

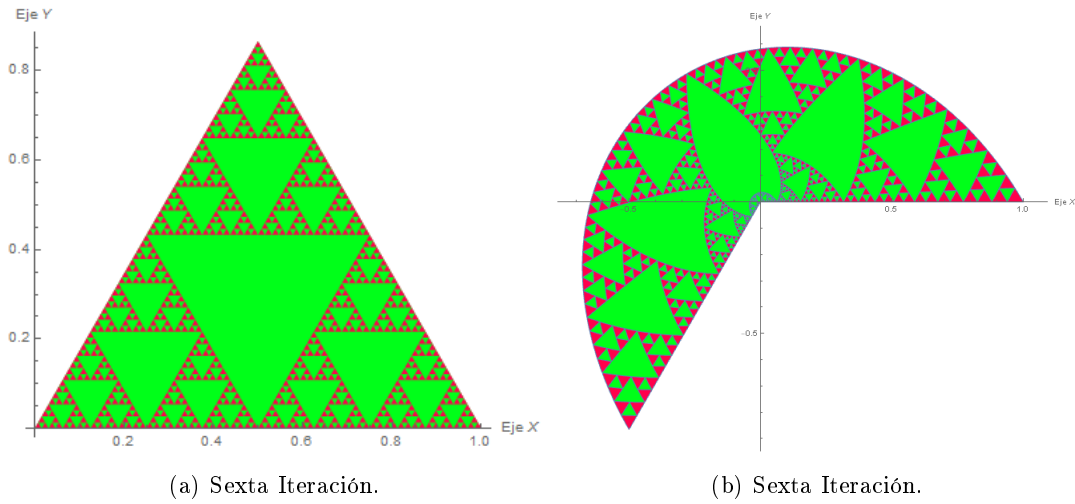


Figura 6.11: Imagen del mapeo del Triángulo de Sierpinski bajo  $f(z) = z^4$ .

■ **Ejemplo. 6.3** En el caso de que  $F$  sea el Triángulo de Sierpinski, al usar el mapeo  $f(z) = z^6$ , obtenemos:

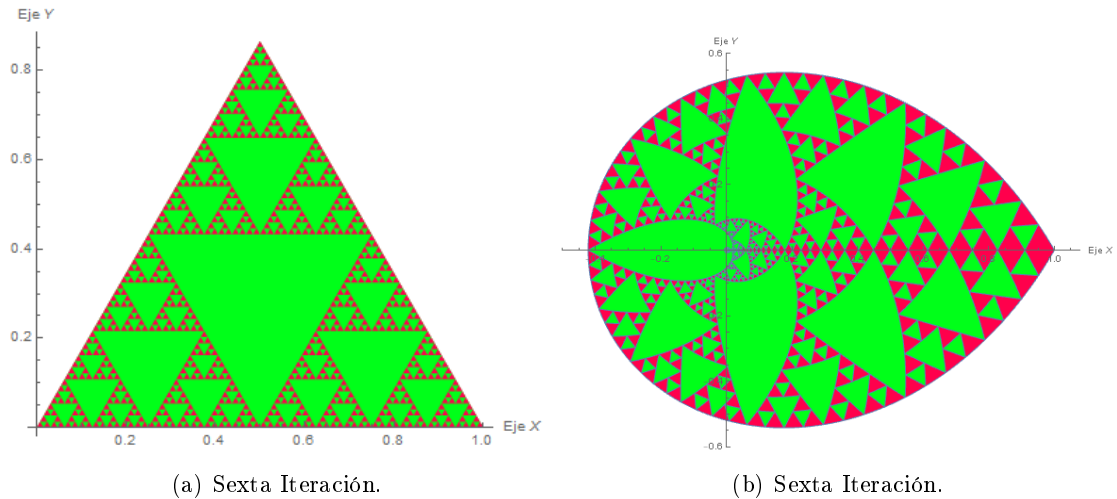


Figura 6.12: Imagen del mapeo del Triángulo de Sierpinski bajo  $f(z) = z^6$ .

■ **Ejemplo. 6.4** Una variante de la Alfombra de Sierpinski ocurre cuando dividimos al cuadrado unidad en 9 partes iguales y se elimina a las 4 partes de verde:

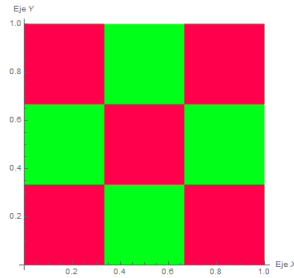


Figura 6.13: Primera iteración de una variante de la Alfombra de Sierpinski

Si continuamos con este proceso con los 5 cuadrados que quedan, resultan las siguientes imágenes:

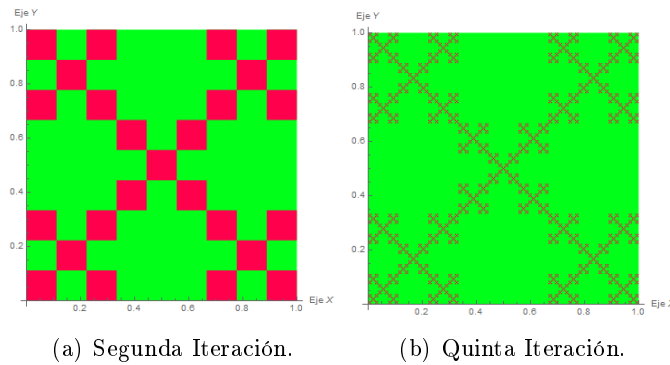


Figura 6.14: Variante de la Alfombra de Sierpinski.

Si a esta imagen le aplicamos el mapeo cuadrático, resulta:

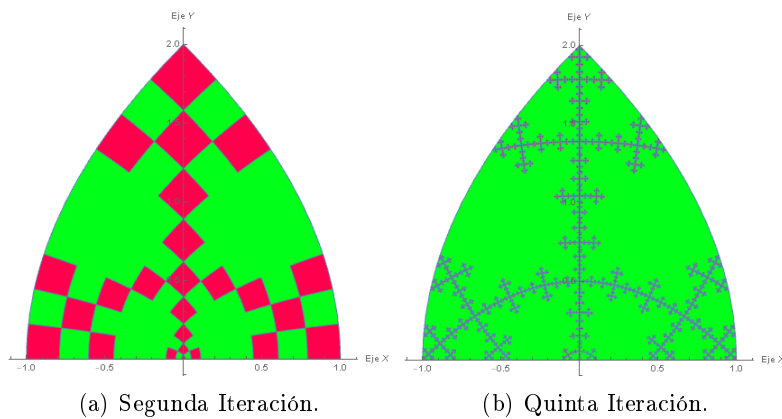


Figura 6.15: Imagen de una variante de la Alfombra de Sierpinski bajo  $f(z) = z^2$ .

### 6.3. Sobre la dimensión de las imágenes.

El cálculo de la dimensión podemos estimarla teniendo en cuenta la definición de dimensión **Box-Counting**.

**Definición. 6.3.1 – Dimensión Box-Counting.** (Falconer[6, Def. 3.1 pag 41.]) Sea  $F$  cualquier conjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  diferente del vacío y sea  $N_\delta(F)$  el menor número de conjuntos de diámetro menor que

$\delta$  que cubre a  $F$ . La inferior y superior dimensión Box-Counting de  $F$  es respectivamente definida por:

$$\underline{\dim}_B(F) = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Al valor común de los límites anteriores se le denominada dimensión Box-Counting o dimensión Box de  $F$  y se le define mediante:

$$\dim_H(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

A partir de esta definición podemos decir que si  $s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$ , entonces  $N_\delta(F) \sim c\delta^{-s}$ , luego al aplicar logaritmo resulta:

$$\log N_\delta(F) \simeq \log c - s \log \delta$$

Así pues si somos capaces de determinar los pares  $(\log \delta, \log N_\delta(F))$  para diferentes escalados entonces al hacer un modelo de regresión lineal estaremos determinando aproximadamente la dimensión del conjunto  $F$ .

■ **Ejemplo. 6.5** Si  $F$  es la Alfombra de Sierpinski,  $f(z) = z^2$ , y usamos la tercera iteración, al contar las cajas que la contienen para los escalados de  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$  y  $\frac{1}{32}$  se tiene:

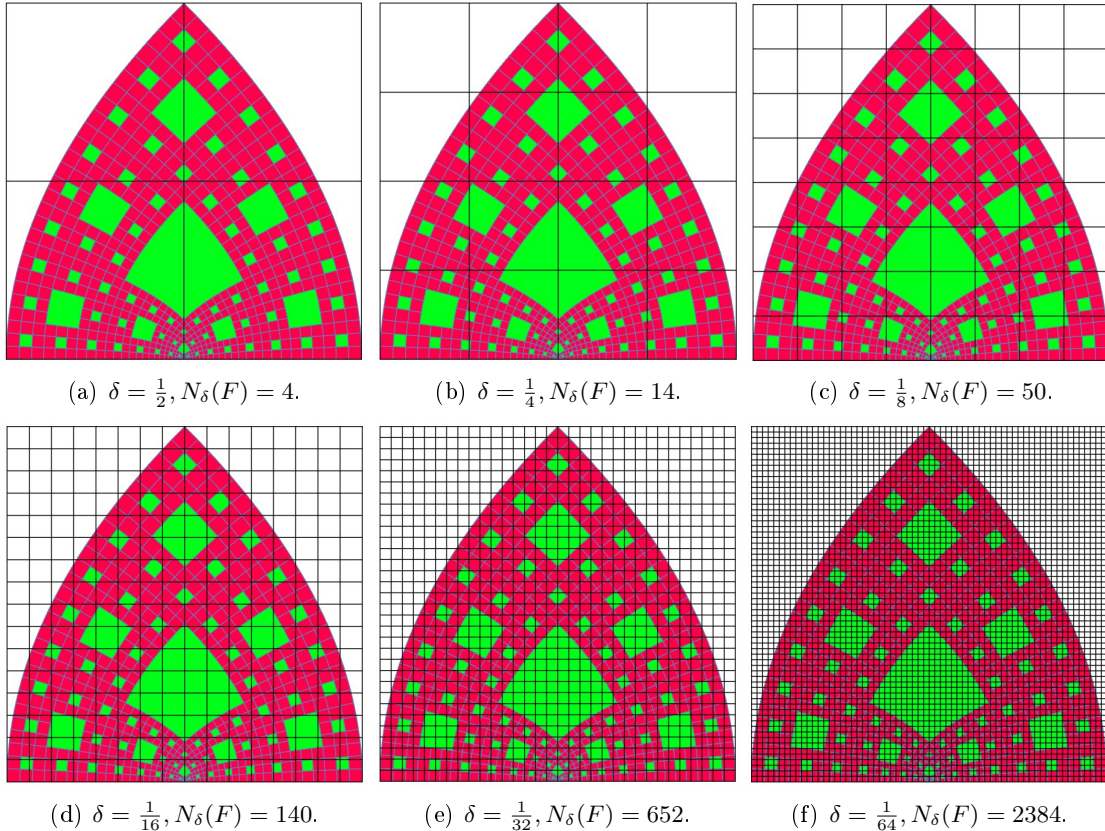


Figura 6.16: Mayado para la dimensión Box-Counting de  $f(F)$  bajo  $f(z) = z^2$ .

Luego si hacemos un modelo de regresión lineal con los puntos:  $(\log(\frac{1}{2}), \log 4), (\log(\frac{1}{4}), \log 14), (\log(\frac{1}{8}), \log 50),$



$(\log(\frac{1}{16}), \log 140)$ ,  $(\log(\frac{1}{32}), \log 652)$  y  $(\log(\frac{1}{64}), \log 2384)$ , obtenemos:

$$\log[N_\delta(F)] = 0 \cdot 072221 - 1 \cdot 83444 \log \delta$$

Siendo  $s = 1 \cdot 83444$  aproximadamente la dimensión de la imagen que se obtiene de mapear la alfombra de Sierpinski mediante  $f(z) = z^2$ . Notemos que la dimensión de la alfombra de Sierpinski es  $\dim_H F = 1 \cdot 89279$ , lo cual justifica que  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$ .

■ **Ejemplo. 6.6** Si  $F$  es el triángulo de Sierpinski y lo mapeamos mediante  $f(z) = z^6$ , al hacer el mayado respectivo para contar su cajas a diferentes escalas obtenemos:

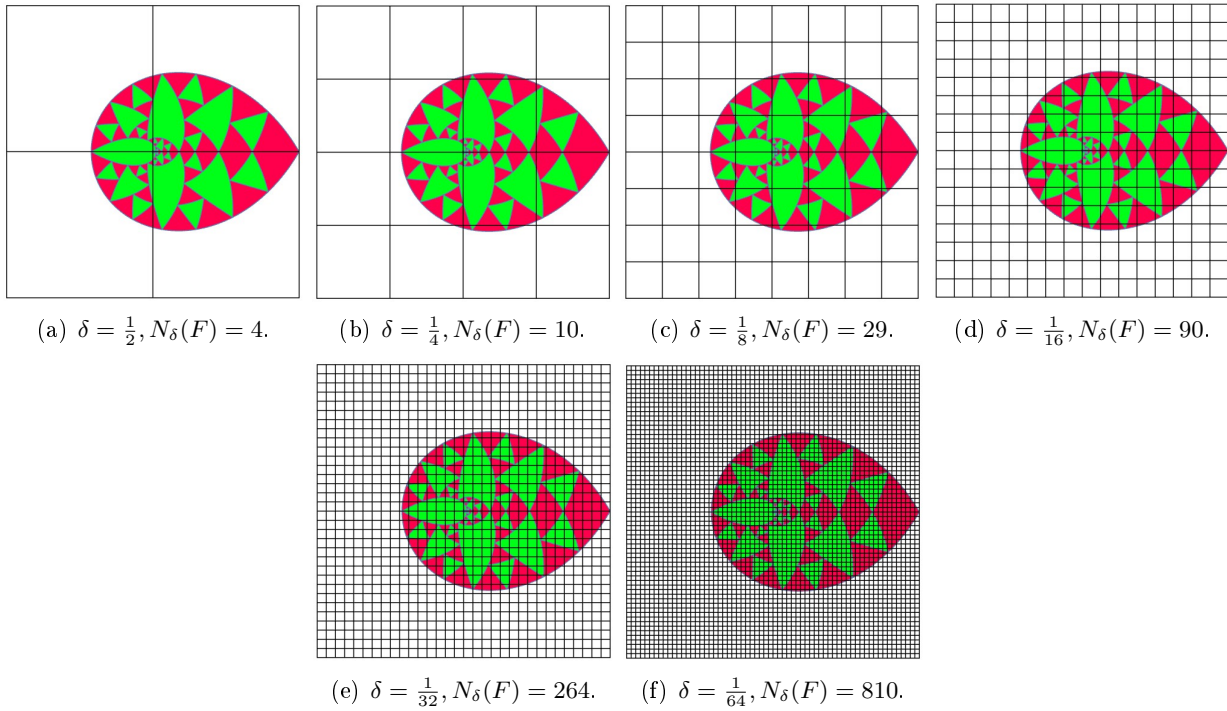


Figura 6.17: Mayado para la dimensión Box-Counting de  $f(F)$  bajo  $f(z) = z^6$ .

En este caso al hacer un modelo de regresión lineal con los datos:  $(\log(\frac{1}{2}), \log 4)$ ,  $(\log(\frac{1}{4}), \log 10)$ ,  $(\log(\frac{1}{8}), \log 29)$ ,  $(\log(\frac{1}{16}), \log 90)$ ,  $(\log(\frac{1}{32}), \log 264)$  y  $(\log(\frac{1}{64}), \log 810)$  obtenemos el modelo:

$$\log[N_\delta(F)] = 0 \cdot 220864 - 1 \cdot 54600459 \log \delta$$

Por tanto la dimensión de  $f(F)$  es aproximadamente  $1 \cdot 54600459$ , siendo esta cantidad menor o igual que la dimensión del triángulo de Sierpinski:

$$s = \frac{\log 3}{\log 2} = 1 \cdot 58496$$



## Capítulo 7

# Modelamiento de Plantas en 2D

Todo en la Naturaleza puede verse en términos de conos, cilindros y esferas. Esta perspectiva euclidiana de la naturaleza pertenece al gran pintor francés Paul Cézanne (1839 - 1906), al cual se le reconoce como el padre de la pintura moderna, sin embargo la réplica la pondría el gran matemático también francés pero de origen polaco Benoit Mandelbroth (1924 - 2010) al decir lo siguiente: Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni siquiera los relámpagos viajan en una línea recta. En el presente capítulo idearemos un procedimiento para modelar algunas imágenes correspondiente a plantas en dos dimensiones utilizando los sistemas de funciones iteradas.

### 7.1. Construcción de transformaciones que modelan plantas

Todos los fractales que hemos visto hasta el momento, son conocidos como fractales artificiales. La gran interrogante que surge es. ¿Existen fractales en la naturaleza? Formalmente podríamos responder con un no, esta negativa puede justificarse dado que matemáticamente los conjuntos fractales se obtienen mediante procesos iterativos infinitos y si observamos por ejemplo la estructura de una planta se forma con un número finito de iteraciones, sin embargo los fractales se asemejan mucho a la naturaleza y son los objetos más adecuados para modelarla. Los fractales clásicos, tales como el Conjunto de Cantor, la Curva de Koch, el Triángulo de Sierpinsky, la Alfombra de Sierpinsky y muchos otros, tienen la característica especial de ser autosemejantes; es decir si tomamos una parte del conjunto, esta es como una reducción del conjunto original, por ejemplo el triángulo de Sierpinsky se aprecia de la siguiente manera

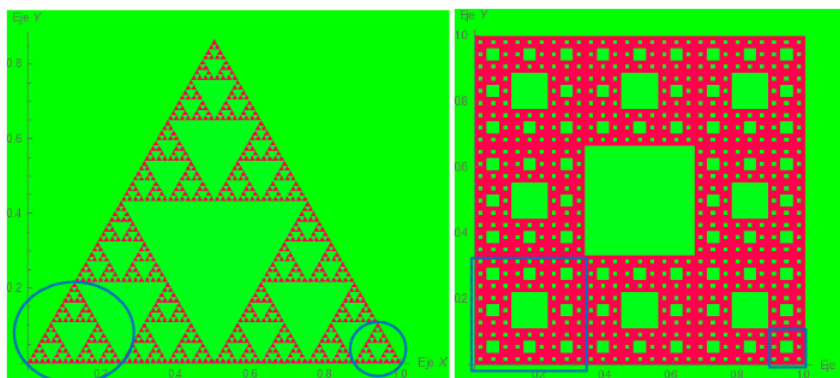
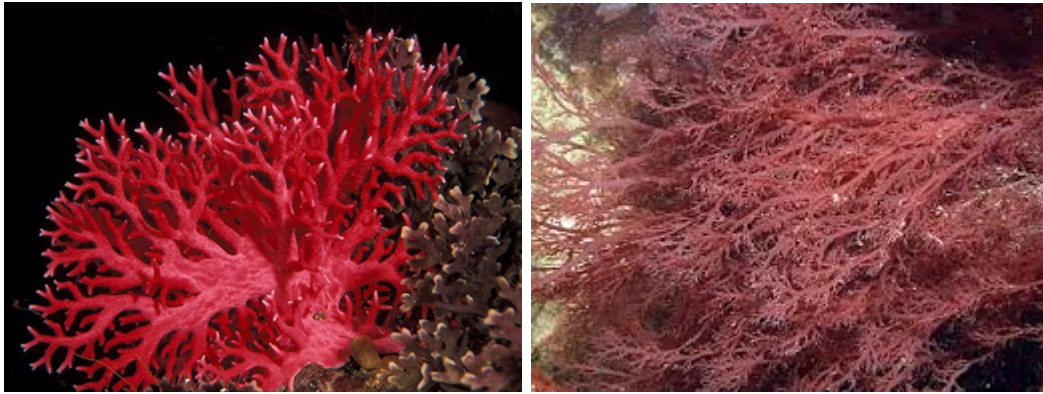


Figura 7.1: Autosemejanza en un conjunto fractal clásico.

En las gráficas anteriores en las partes encerradas de color azul, se aprecia con relativa facilidad que una porción de conjunto, es una reducción de todo el conjunto original, a esta propiedad se le denomina en matemática “Autosemejanza”.

En la naturaleza los fractales están por donde se la mire, tal es así que algunos expertos aseguran que la Geometría Fractal es la herramienta matemática perfecta para modelar cualquier fenómeno natural. A continuación describimos algunas imágenes naturales en donde posiblemente podamos encontrar patrones fractales.

En el mundo marino, las algas rojas se aprecian de la siguiente manera:



(a) Género Chondrus.

(b) Género Gelidium.



(c) Género Gelidium.

Figura 7.2: Algas marinas rojas.

Las ramificaciones correspondiente a una hoja de Col, posee la siguiente estructura:



(a) Hoja de una col.



(b) Hoja de una col.



(c) Hoja de una col.

Figura 7.3: Imágenes de una hoja de Col.



La estructura correspondiente a un Brócoli también presenta un patrón autosemejante:



Figura 7.4: Brócoli.

Algunos follajes se aprecian de la siguiente manera:



(a) Follaje.



(b) Follaje.



(c) Follaje.

Figura 7.5: Imágenes correspondiente a diferentes tipos de follaje (Pinus).

El Cupressus Macrocarpa, cuyo nombre común es Ciprés, se aprecia de la siguiente manera:



Figura 7.6: Planta conocida científicamente como Cupressus Macrocarpa.

Si de la planta anterior tomamos un subconjunto (como por ejemplo una rama), dicho subconjunto

se compone de partes similares a diferente escala, como se aprecia a continuación:



Figura 7.7: Partes de una rama del Cupressus Macrocarpa.

La Palmera Dum originaria del Norte y Centro del Continente Africano (Egipto, Sudán, Somalia, Camerún, Costa de Marfil, Gambia) posee la característica de tener una ramificación dicotómica, como se aprecia en la figura de la izquierda, a la derecha podemos ver una proyección de la misma en el plano.



Figura 7.8: La Palmera Dum (Hyphaene Thebaica) originaria del norte y centro de África.

Los helechos forman una especie muy importante de la familia de los Pteridofitas, su estructura es posible modelarla utilizando la Geometría Fractal. A continuación se muestran algunas imágenes de helechos existentes en el Perú.



Figura 7.9: Imágenes de plantas de helechos en el Perú.

Observando las características de las imágenes anteriores, podemos intentar modelar algunas de ellas utilizando un sistema de funciones iteradas adecuado. El procedimiento que utilizaremos consta de los siguientes pasos:

1. Ubicar la imagen en un rectángulo.
2. Observar meticulosamente las ramificaciones de la planta con la finalidad de identificar un patrón.
3. En base al paso anterior, decidir el número de transformaciones que participarán en el modelamiento de la imagen, mediante una descomposición de la misma.
4. Definir las transformaciones utilizando regla y transportador para determinar el escalamiento y el ángulo que genera dicho parte de la imagen.

Cabe indicar que el IFS que modele la imagen, se define en base a rotaciones y traslaciones, razón por la cual recordaremos la estructura matemática de una rotación.

**Definición. 7.1.1 – Traslación.** Si el origen de coordenadas  $O(0,0)$  es trasladado a un nuevo origen  $O'(h,k)$  y  $(x,y)$ ,  $(x',y')$  son las coordenadas de un punto  $P$ , referidos al sistema original y trasladado respectivamente, entonces las ecuaciones de traslación vienen dada por:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

Es decir  $(x,y) = (x',y') + (h,k)$

**Definición. 7.1.2 – Rotación.** Si  $(p, q)$  son las coordenadas de un punto antes de girar los ejes un ángulo  $\theta$  y  $(x, y)$  son las coordenadas despues de efectuar la rotación, entonces las ecuaciones de rotación vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = p\cos\theta - q\sin\theta \\ y = p\sin\theta + q\cos\theta \end{cases}$$

Matricialmente podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

A partir de las definiciones anteriores, las transformaciones que compondrán a cada IFS serán de la forma:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Matriz de} \\ \text{Escalamiento} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

A continuación modelaremos algunas imágenes utilizando los pasos anteriores.

■ **Ejemplo. 7.1** Para una hoja de helecho se tiene la siguiente descomposición

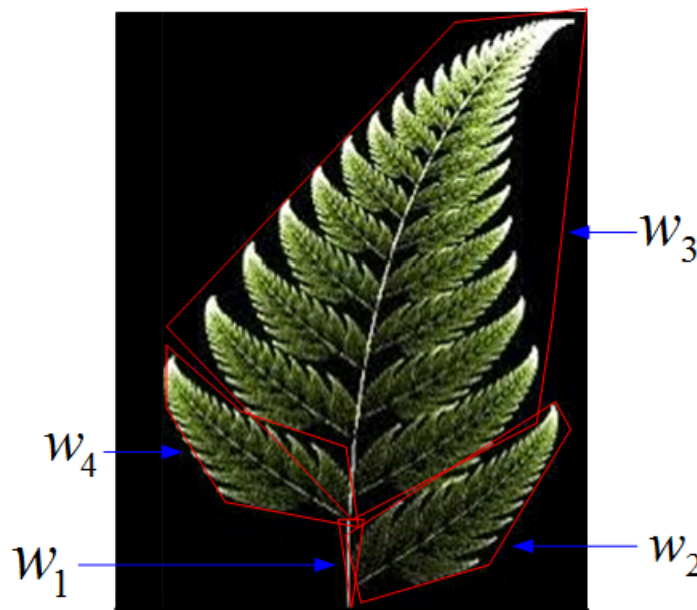


Figura 7.10: Descomposición de una hoja de helecho.

En la gráfica anterior podemos observar que se necesitarán cuatro transformaciones para modelar una hoja de Helecho y para determinarlas podemos imprimir la imagen en una hoja con la finalidad de medir las proporciones. Si imprimimos la imagen en un rectángulo de 11 *cm* de ancho por 14 *cm* de alto se tiene:

Para  $w_1$ , observamos que dicha transformación modelará una especie de tallo sin ningún ancho razón por la cual no tendrá escalamiento en el eje  $X$ . Luego:

$$w_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0, \frac{1}{7}y) = (0, 0 \cdot 14y)$$

Para  $w_3$ , observamos que modelará la parte superior de la hoja. Dicha parte tiene un ancho aproximado es de 8 *cm* y el alto aproximado es de 12 *cm*, inclinado ligeramente un ángulo de  $5^\circ$  en sentido horario y trasladada hasta el punto  $(0, \frac{2}{14})$ . Luego:

$$w_3(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(-5\frac{\pi}{180}) & -\sin(-5\frac{\pi}{180}) \\ \sin(-5\frac{\pi}{180}) & \cos(-5\frac{\pi}{180}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & 0 \\ 0 & \frac{12}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{14} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$w_3(x, y) = (0 \cdot 724505x + 0 \cdot 0747049y, -0 \cdot 063386x + 0 \cdot 853881y - 0 \cdot 142857)$$

$w_4$ , modela la hoja inferior de la izquierda, la cual tiene un ancho aproximado de 2 *cm* y un alto aproximado de 6 *cm*, una inclinación de aproximadamente  $45^\circ$  en sentido antihorario y trasladada hasta el punto  $(0, \frac{2}{14})$ , recordemos que cuando la inclinación es hacia la izquierda se considera el ángulo positivo y cuando la inclinación es hacia la derecha se considera el ángulo negativo. Así pues:

$$w_4(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(45\frac{\pi}{180}) & -\sin(45\frac{\pi}{180}) \\ \sin(45\frac{\pi}{180}) & \cos(45\frac{\pi}{180}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & \frac{6}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{14} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$w_4(x, y) = (0 \cdot 128565x - 0 \cdot 303046y, 0 \cdot 128565x + 0 \cdot 303046y + 0 \cdot 142857)$$

La transformación  $w_2$ , modelará la hoja inferior derecha que puede ser tomada como una reflexión de la transformación  $w_4$ , pero trasladada hasta el punto  $(0, \frac{0.7}{14})$  con igual ancho de 2 *cm*, pero de un alto aproximado de 7 *cm*. De esta manera  $w_2$  antes de reflejarla y trasladarla será:

$$w_2'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(45 \frac{\pi}{180}) & -\sin(45 \frac{\pi}{180}) \\ \sin(45 \frac{\pi}{180}) & \cos(45 \frac{\pi}{180}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & 0 \\ 0 & \frac{7}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego:

$$w_2'(x, y) = (0 \cdot 128565x - 0 \cdot 353553y, 0 \cdot 128565x + 0 \cdot 353553y)$$

Posteriormente al reflejar  $w_2'$  en el eje  $Y$ , debemos cambiar de signo a la abscisa y luego trasladarla hasta el punto  $(0, \frac{0.7}{14})$ . Así pues:

$$w_2(x, y) = (-0 \cdot 128565x + 0 \cdot 353553y, 0 \cdot 128565x + 0 \cdot 353553y) + (0, \frac{0.7}{14})$$

Por tanto:

$$w_2(x, y) = (-0 \cdot 128565x + 0 \cdot 353553y, 0 \cdot 128565x + 0 \cdot 353553y + 0.05)$$

■ **Ejemplo. 7.2** Un lycopodium se observa de la siguiente forma

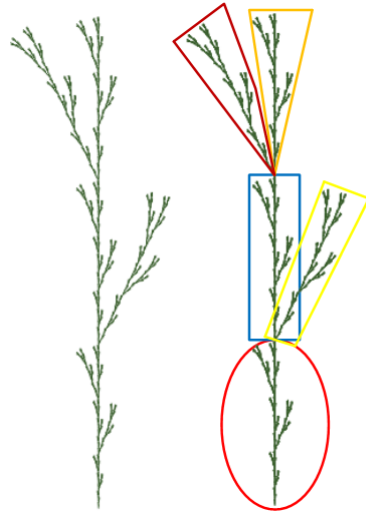


Figura 7.11: Descomposición de un Lycopodium en IFS.

En este caso se necesitarán 5 transformaciones y son las que se indican en la figura (3.11) al lado derecho.

Bien podemos apreciar que las cinco transformaciones modelarán 5 partes exactamente del mismo tamaño, esto significa que los escalamientos tanto en el eje  $X$  como en el eje  $Y$  serán los mismos para

las cinco transformaciones, lo único que cambia son los ángulos que miden la inclinación para cada una de las partes y los puntos de traslación.

El tamaño correspondiente a cada una de las partes es  $\frac{1}{3}$  del tamaño original y el ancho respectivo es aproximadamente  $\frac{1}{4}$  del ancho original, el ángulo de inclinación correspondientes a las partes encerradas en color amarillo y rojo oscuro es de aproximadamente  $-\frac{\pi}{7}$  y  $\frac{\pi}{7}$  respectivamente. Con estas observaciones tenemos que:

$$w_1(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{7}) & -\sin(-\frac{\pi}{7}) \\ \sin(-\frac{\pi}{7}) & \cos(-\frac{\pi}{7}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_3(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_4(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$w_5(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{7}) & -\sin(\frac{\pi}{7}) \\ \sin(\frac{\pi}{7}) & \cos(\frac{\pi}{7}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Efectuando en cada una de las transformaciones anteriores se tendrá el siguiente IFS:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x, y) = (0 \cdot 25x, 0 \cdot 333333y) \\ w_2(x, y) = (0 \cdot 225242x + 0 \cdot 144628y, -0 \cdot 108471x + 0 \cdot 300323y + 0 \cdot 333333) \\ w_3(x, y) = (0 \cdot 25x, 0 \cdot 333333y + 0 \cdot 333333) \\ w_4(x, y) = (0 \cdot 25x, 0 \cdot 333333y + 0 \cdot 666667) \\ w_5(x, y) = (0 \cdot 225242x - 0 \cdot 144628y, 0 \cdot 108471x + 0 \cdot 300323y + 0 \cdot 666667) \end{array} \right.$$

Siguiendo el mismo proceso de los ejemplos (1) y (2), podemos construir un gran número de IFS que generen imágenes naturales.

## 7.2. Códigos que generan plantas en Mathematica 10.0

En la presente sesión explicaremos la funcionalidad de los diferentes comandos que conforman la estructura del programa que se utiliza para generar las diferentes imágenes naturales.

**1. El comando Map.** Evalúa una función en una lista; entiéndase por listas las siguientes:

$$a = \{1, 2, 3\}, \quad b = \{\{0, 0\}, \{2, 1\}, \{1, -1\}, \{2, 3\}\}, \quad \text{etc}$$

La funcionalidad del comando **Map** es la siguiente:

Si declaramos la función  $f(x) = x^2 + 3$ , y aplicamos el comando **Map** en la lista  $a = \{1, 2, 3\}$  se tiene lo siguiente:

$$\text{In}[1] := f[x_] := x^2 + 3$$

$$\text{In}[2] := \text{Map}[f, \{1, 2, 3\}]$$

$$\text{Out}[2] = \{4, 7, 12\}$$

**2. El comando Flatten.** Suprime las llaves de una lista en la que sus elementos están entre llaves. Su funcionalidad es la siguiente:

Si aplicamos el comando **Flatten** a la lista  $b = \{\{0, 0\}, \{2, 1\}, \{1, -1\}, \{2, 3\}\}$ , se tiene:

$$\text{In}[1] := \text{Flatten}[\{\{0, 0\}, \{2, 1\}, \{1, -1\}, \{2, 3\}\}]$$

$$\text{Out}[1] = \{0, 0, 2, 1, 1, -1, 2, 3\}$$

**3. El comando Partition.** Particiona una lista de la forma  $\{1, 2, 3, 8, 10, 12, -5, 3, 0, 4, 5, 7\}$  según nuestra conveniencia, funciona de la siguiente manera:

$$\text{In}[1] := \text{Partition}[\{1, 2, 3, 8, 10, 12, -5, 3, 0, 4, 5, 7\}, 2]$$

$$\text{Out}[1] = \{\{1, 2\}, \{3, 8\}, \{10, 12\}, \{-5, 3\}, \{0, 4\}, \{5, 7\}\}$$

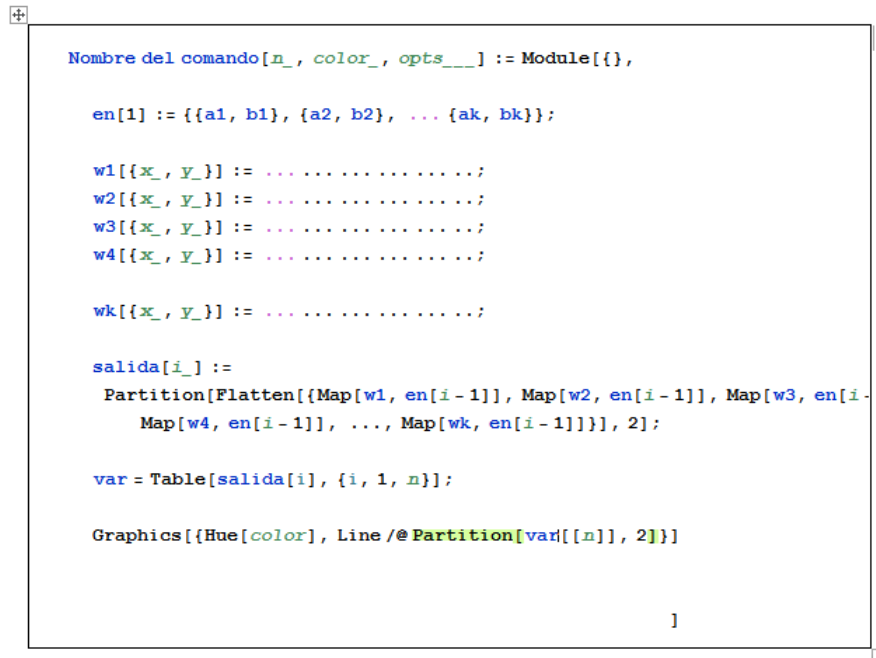


Es decir reagrupa a la lista de 2 en 2 elementos.

Si quisiéramos agrupar de 3 en tres se tendrá:

$$\begin{aligned} In[1] &:= Partition[\{1, 2, 3, 8, 10, 12, -5, 3, 0, 4, 5, 7\}, 3] \\ Out[1] &= \{\{1, 2, 3\}, \{8, 10, 12\}, \{-5, 3, 0\}, \{4, 5, 7\}\} \end{aligned}$$

La estructura de los programas que utilizaremos en la generación de las imágenes es la siguiente:



```

Nombre del comando[n_, color_, opts___] := Module[{},

  en[1] := {{a1, b1}, {a2, b2}, ... {ak, bk}};

  w1[{x_, y_}] := .....;
  w2[{x_, y_}] := .....;
  w3[{x_, y_}] := .....;
  w4[{x_, y_}] := .....;

  wk[{x_, y_}] := .....;

  salida[i_] :=
    Partition[Flatten[{Map[w1, en[i - 1]], Map[w2, en[i - 1]], Map[w3, en[i - 1]],
      Map[w4, en[i - 1]], ..., Map[wk, en[i - 1]]}], 2];

  var = Table[salida[i], {i, 1, n}];

  Graphics[{Hue[color], Line /@ Partition[var[[n]], 2]}]

]

```

Figura 7.12: Estructura del programa que genera imágenes naturales.

Vale la pena señalar que  $en[1]$  es una lista de puntos del plano y  $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$  son las transformaciones que conforman el IFS.

Los puntos suspensivos que aparecen después de cada transformación indican que allí se debe ingresar las coordenadas que componen a la misma, por ejemplo para el IFS del ejemplo (3.2), dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x, y) = (0 \cdot 25x, 0 \cdot 333333y) \\ w_2(x, y) = (0 \cdot 225242x + 0 \cdot 144628y, -0 \cdot 108471x + 0 \cdot 300323y + 0 \cdot 333333) \\ w_3(x, y) = (0 \cdot 25x, 0 \cdot 333333y + 0 \cdot 333333) \\ w_4(x, y) = (0 \cdot 25x, 0 \cdot 333333y + 0 \cdot 666667) \\ w_5(x, y) = (0 \cdot 225242x - 0 \cdot 144628y, 0 \cdot 108471x + 0 \cdot 300323y + 0 \cdot 666667) \end{array} \right.$$

A la transformación  $w_1$ , la declararemos de la siguiente forma:

$$w_1[\{x_-, y_-\}] := \{\frac{1}{4}x, \frac{1}{3}y\};$$

### 7.3. Imágenes naturales mediante IFS

A continuación presentamos algunas imágenes que podemos obtener usando un IFS y la programación descrita anteriormente, cabe señalar que el IFS que acompaña a la correspondiente imagen, se obtiene siguiendo el mismo análisis propuesto en los ejemplos (3.1) y (3.2).

■ **Ejemplo. 7.3** Con el IFS del ejemplo (3.1), dado por:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (0, 0 \cdot 14y) \\ w_2(x, y) = (-0 \cdot 128565x + 0 \cdot 353553y, 0 \cdot 128565x + 0 \cdot 353553y + 0 \cdot 05) \\ w_3(x, y) = (0 \cdot 724505x + 0 \cdot 0747049y, -0 \cdot 063386x + 0 \cdot 853881y - 0 \cdot 142857) \\ w_4(x, y) = (0 \cdot 128565x - 0 \cdot 303046y, 0 \cdot 128565x + 0 \cdot 303046y + 0 \cdot 142857) \end{cases}$$

Se logra las siguientes imágenes:

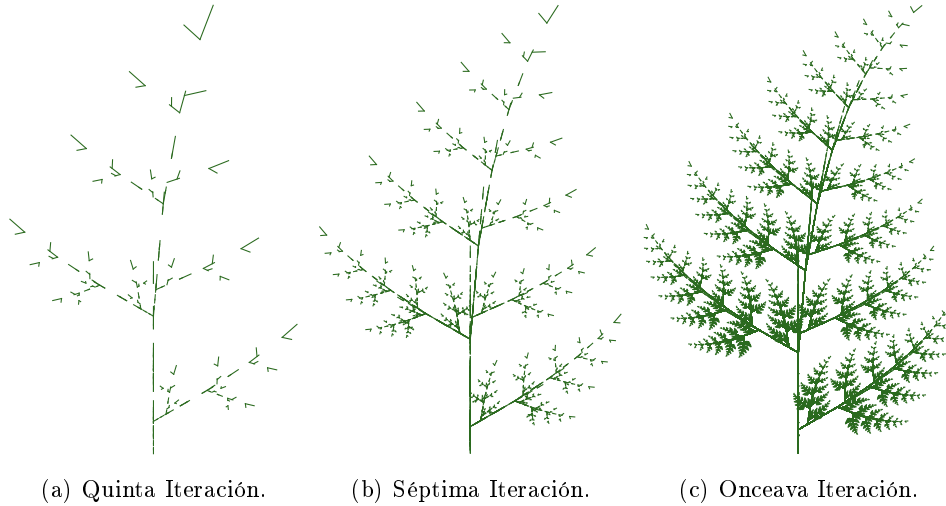


Figura 7.13: Imágenes de la hoja de un Helecho mediante un IFS.

■ **Ejemplo. 7.4** Para el IFS dado por:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (0 \cdot 733333x, 0 \cdot 777778y + 0 \cdot 222222) \\ w_2(x, y) = (0, 0 \cdot 222222y) \\ w_3(x, y) = (0 \cdot 235702x - 0 \cdot 235702y, 0 \cdot 235702x + 0 \cdot 235702y + 0 \cdot 0740741) \\ w_4(x, y) = (-0 \cdot 235702x + 0 \cdot 235702y, 0 \cdot 235702x + 0 \cdot 235702y + 0 \cdot 222222) \end{cases}$$

Se logra la siguiente imagen de hoja de helecho.

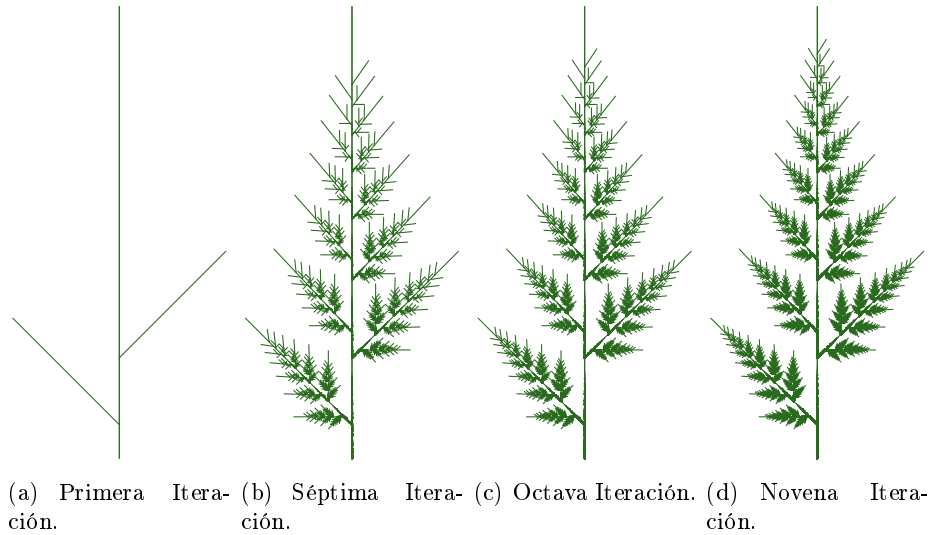


Figura 7.14: Imágenes de la hoja de un Helecho mediante un IFS.

■ **Ejemplo. 7.5** El IFS del ejemplo (3.2), definido mediante:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (0 \cdot 25x, 0 \cdot 333333y) \\ w_2(x, y) = (0 \cdot 225242x + 0 \cdot 144628y, -0 \cdot 108471x + 0 \cdot 300323y + 0 \cdot 333333) \\ w_3(x, y) = (0 \cdot 25x, 0 \cdot 333333y + 0 \cdot 333333) \\ w_4(x, y) = (0 \cdot 25x, 0 \cdot 333333y + 0 \cdot 666667) \\ w_5(x, y) = (0 \cdot 225242x - 0 \cdot 144628y, 0 \cdot 108471x + 0 \cdot 300323y + 0 \cdot 666667) \end{cases}$$

Genera las siguientes imágenes:



(a) Primera Iteración. (b) Segunda Iteración. (c) Tercera Iteración. (d) Quinta Iteración.

Figura 7.15: Imágenes de un Lycopodium mediante un IFS.

■ **Ejemplo. 7.6** Si consideramos el IFS definido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x, y) = (0, 0.538462y) \\ w_2(x, y) = (0.443826x + 0.154508y, -0.144208x + 0.475528y + 0.538462) \\ w_3(x, y) = (0.443826x - 0.154508y, 0.144208x + 0.475528y + 0.538462) \\ w_4(x, y) = (0.443826x - 0.154508y, 0.144208x + 0.475528y + 0.269231) \end{array} \right.$$

Se obtienen las siguientes imágenes:

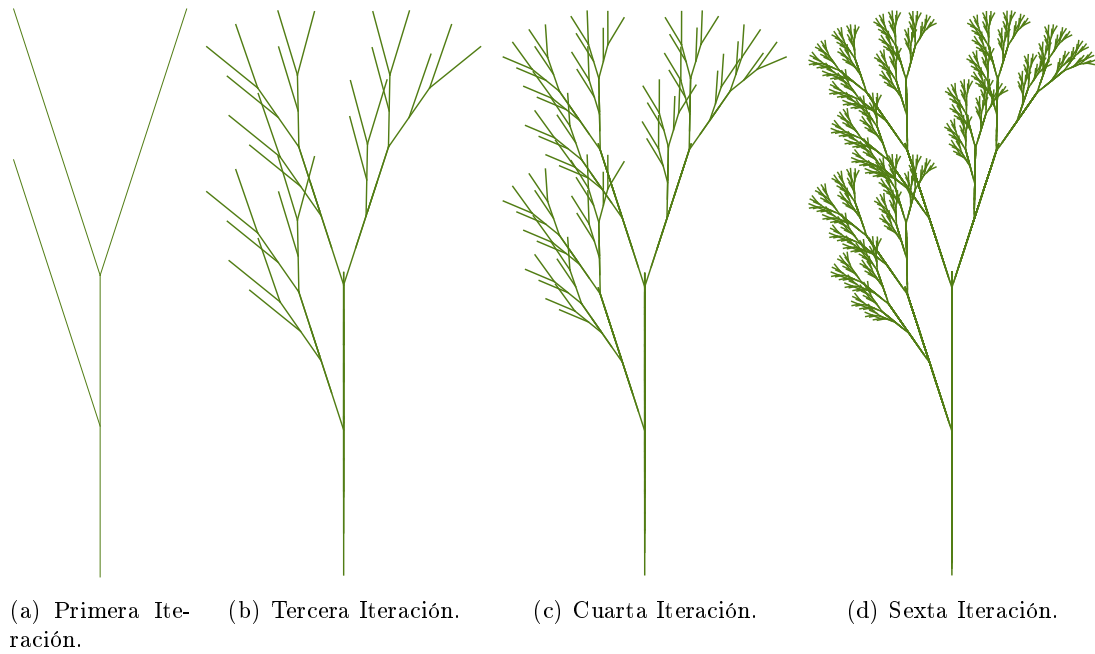


Figura 7.16: Imágenes de un Tmesipteris mediante un IFS.

■ **Ejemplo. 7.7** Con el IFS definido mediante:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (0, 0.45y) \\ w_2(x, y) = (0.614297x + 0.282024y, -0.29583x + 0.58563y + 0.35) \\ w_3(x, y) = (0.40853x + 0.0287848y, -0.0214102x + 0.549246y + 0.35) \\ w_4(x, y) = (0.354283x - 0.3y, 0.204545x + 0.519615y + 0.35) \end{cases}$$

Se genera una especie de alga marina roja.

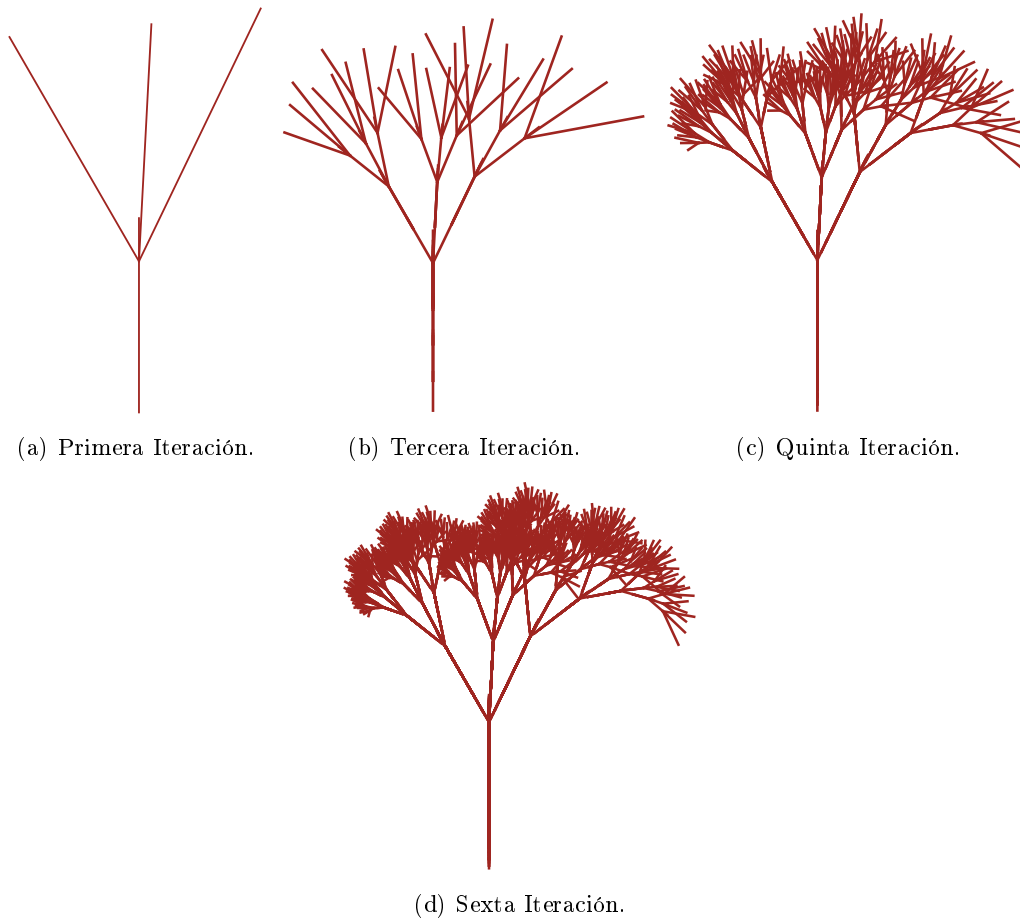


Figura 7.17: Imágenes de una alga marina roja conocida como Ahnfeltia mediante un IFS.

■ **Ejemplo. 7.8** Usando el IFS definido mediante:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (0, 0 \cdot 3y) \\ w_2(x, y) = (0 \cdot 562917x + 0 \cdot 333333y, -0 \cdot 325x + 0 \cdot 57735y + 1) \\ w_3(x, y) = (0 \cdot 58563x - 0 \cdot 325413y, 0 \cdot 282024x + 0 \cdot 675727y) \end{cases}$$

Se obtiene imágenes referentes a un árbol fractal.

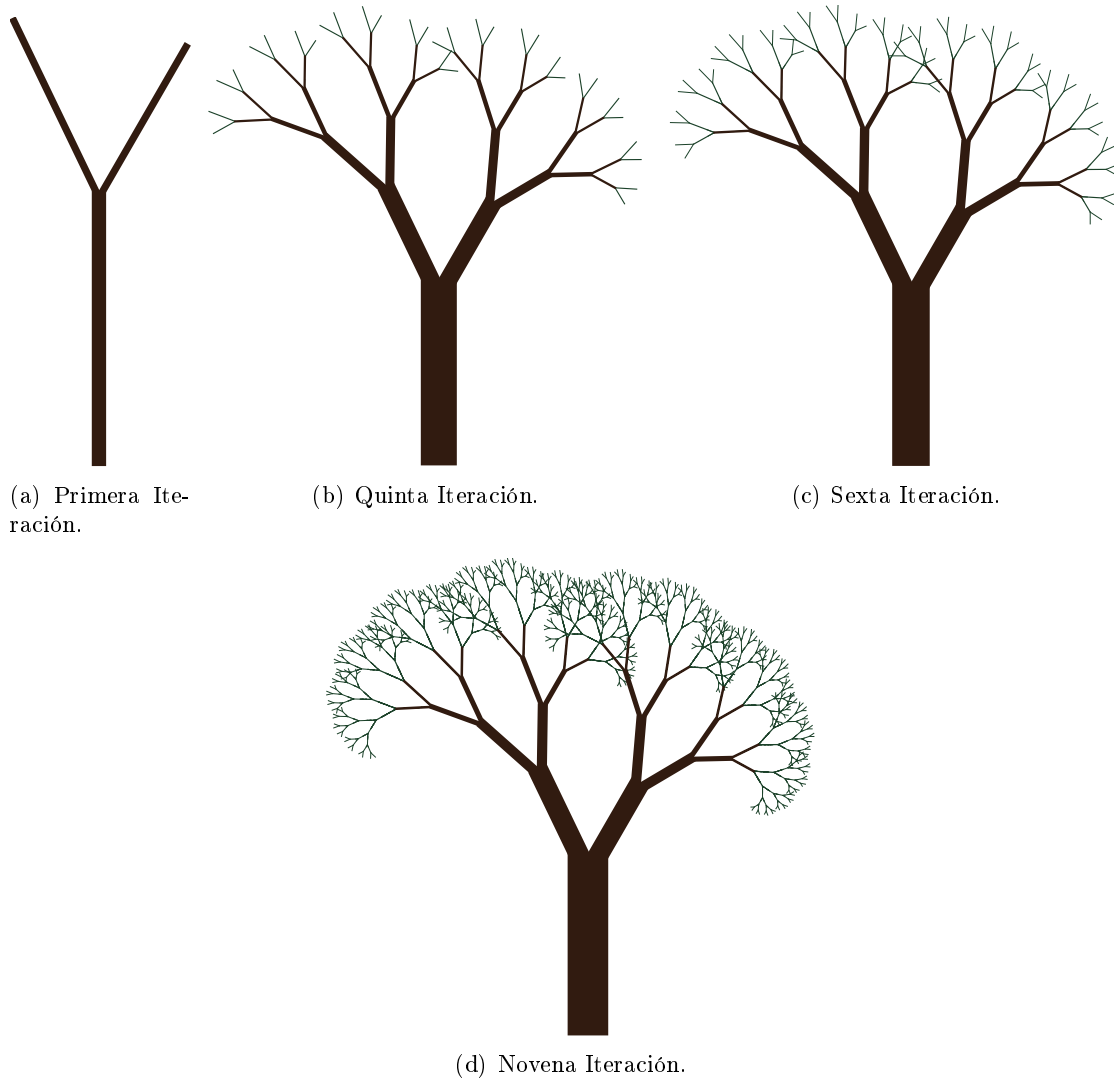


Figura 7.18: Imágenes de un árbol fractal del género Ceiba mediante un IFS.

**Observación 7.1** Los IFS propuestos en los ejemplos (3.4), (3.6), (3.7) y (3.8), se logran analizando la primera iteración ilustradas en las figuras (3.14-a), (3.16-a), (3.17-a) y (3.18-a) respectivamente.





## Capítulo 8

# Una aplicación en las telecomunicaciones

En el presente capítulo describiremos una aplicación en el campo de la Ingeniería Electrónica, específicamente en el campo de las comunicaciones, cabe señalar que la presente descripción forma parte de un artículo publicado en la revista IEEE XPLORE con ISBN 978-1-5090-2533-6 a partir de una investigación realizada por el estudiante de Ingeniería Electrónica de la Universidad Nacional de Piura Orlando Francois Gonzáles Palacios en la Universidad Nacional de Piura y la Pontificia Universidad Católica del Perú, la cual fué asesorada por Jorge Arturo Heraud Perez y Ricardo Erick Díaz Vargas ambos de la Pontificia Universidad Católica del Perú y Segundo Basilio Correa Erazo de la Universidad Nacional de Piura en la parte matemática.

### 8.1. Introducción

Siguiendo un proceso parecido a la construcción de la curva de Koch, Helge von Koch construyó otra curva (esta vez cerrada) denominada hoy en día **El Copo de Nieve**, dicha curva también posee la propiedad de ser continua, autosemejante y no diferenciable. En este caso se parte de un triángulo equilátero, dividimos cada lado en tres partes iguales, dibujamos un triángulo equilátero en el tercio medio y extraemos la base. Siguiendo el mismo proceso *ad infinitum*, se obtiene el famoso copo de nieve. Geometricamente se le puede apreciar de la siguiente manera:

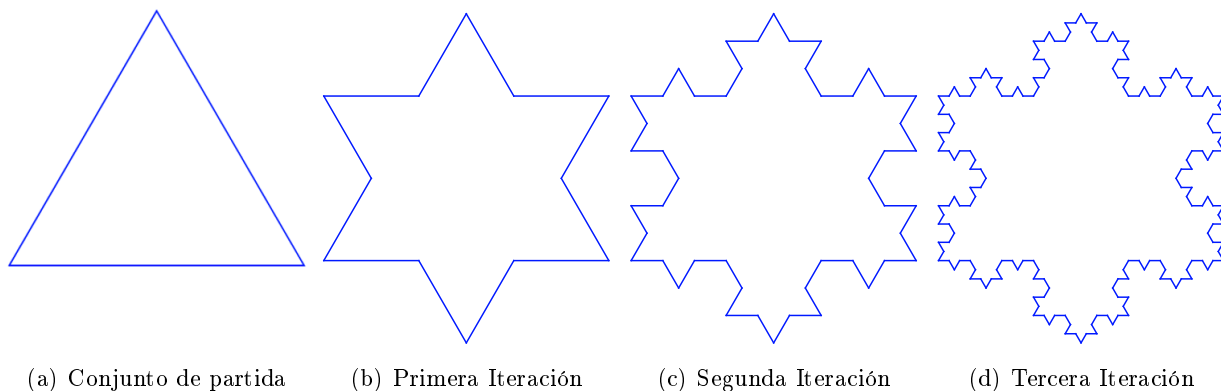


Figura 8.1: El Copo de Nieve de Von Koch.

Las misiones espaciales de CubeSats' han aumentado en la última década, lo que corresponde de alguna manera a un aumento en la información, el apoyo tecnológico y la experiencia accesible a las

universidades, pequeñas empresas y países que esperan alcanzar mayores niveles en la tecnología aeroespacial [13].

El desarrollo de los estándares de CubeSat y Parámetros [14], son un reto para la aplicación de sus Sub sistemas, y son vitales para asegurar la comunicación con antenas para telemetría y tele-comando como parte de dichos subsistemas. No obstante, algunas misiones tienden a fallar debido a Problemas de comunicación, que son causados por el diseño de la antena. Por lo tanto, es fundamental lograr un diseño óptimo Rendimiento que garantiza el éxito de la misión [15].

En los CubeSat, las antenas se diseñan comúnmente para bandas VHF / UHF con tasas de bit muy bajas, tales como monopolos o dipolos. Los primeros satélites peruanos, PUCP-Sat-1 y Pocket-PUCP, los utilizó con eficacia [16]. Sin embargo la implementación de los mismos es compleja debido a que el tamaño de estas antenas son mayores que los CubeSats.

En este trabajo, diseñamos una antena fractal micro-strip en una FR-4, lo cual es conveniente para proyectos de bajo presupuesto en su implementación. Los diseños de antenas fractales permiten reducir el tamaño y mantener un amplio ancho de banda según su número de iteraciones. Esta es una gran contribución al proceso de planificación de CubeSat ya que el volumen de componentes es un factor crítico para su estándar de desarrollo. Las simulaciones de CubeSat funcionan con un sistema de estabilización de actitud magnética pasiva [18]. por lo tanto, nosotros diseñaremos una antena con un patrón de radiación omnidireccional para aumentar la precisión [19].

Las dimensiones de las caras del CubeSat también se consideran, dependiendo del número de unidades (1U, 2U, 3U). El satélite 1U Estándar establece que cada cara debe tener un área de 10 cm por 10 cm. Con las caras CubeSat usadas principalmente para paneles solares, el área disponible para antenas está restringido.

## 8.2. Diseño de antena de copo de nieve

Para cuando se consideran diseños fractales, las dimensiones y las frecuencias de trabajo dependen del número de iteraciones del IFS que lo genera. En el presente trabajo, se ha desarrollado un algoritmo en Matlab utilizando un IFS para determinar el tamaño de la antena en relación con la frecuencia de nuestro diseño. La figura 1.2 muestra los resultados de una simulación a una frecuencia de 2,4 GHz Y 4 iteraciones diferentes, posteriormente exportadas a CST Microwave Estudio [8-10].

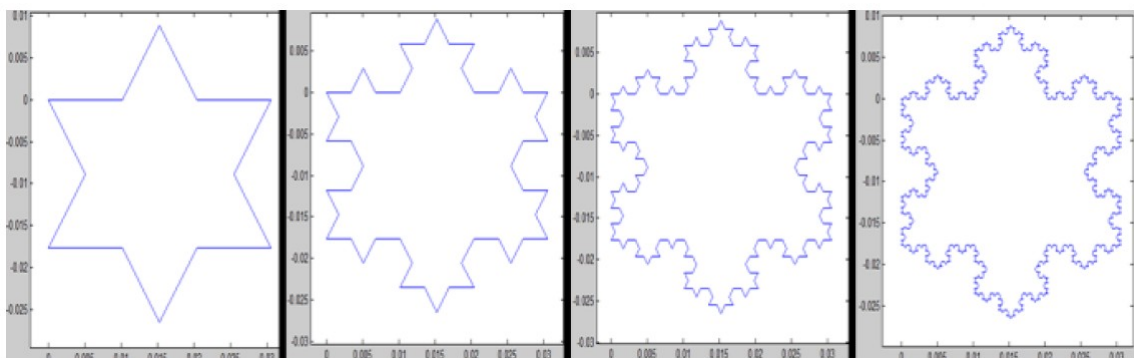


Figura 8.2: Copo de nieve de Koch con 1, 2, 3 y 4 iteraciones.

Este diseño se basa en antenas tipo circuito cerrado; tal diseño es ampliamente utilizado en sistemas HF, VHF y UHF y antena arrays [20]. Además, el patrón de radiación de un bucle eléctricamente pequeño con cualquier forma euclidiana es similar al de un dipolo infinitesimal, teniendo su máximo patrón, perpendicular a la del plano de bucle y su mínimo, también paralelo al plano de bucle [21].

La antena microstrip de bucle fractal diseñado, está montada en un FR-4 con las siguientes características. Su optimización se muestra en la Fig. 1.3:

**Sustrato(FR-4)**

**Permitividad Relativa:**  $\epsilon_r = 4,3$

**Grosor del sustrato:**  $1,15mm$

**Espesor de cobre:**  $20 \mu m$

**Tangente de pérdida:**  $TanD = 0 \cdot 003$

**Frecuencia**

**2.3 GHz to 2.45 GHz (Banda de radio aficionada)**

**Plano terrestre:**  $6mm \times 26 \cdot 30mm \times 0 \cdot 02mm$

**Microstrip:**  $5 \cdot 30mm \times 4 \cdot 81mm \times 0 \cdot 02mm$

**Linea de alimentación:** Cable coaxial ( $50\Omega$ )

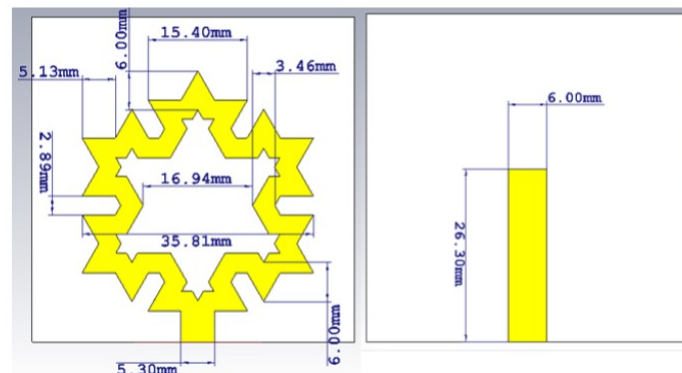


Figura 8.3: Geometría de la antena.

## 8.3. Simulación y resultados

Las dimensiones del sustrato, y el plano de tierra se calculan analíticamente utilizando la geometría fractal y las fórmulas detalladas en [11], y luego se optimiza operando entre 2,3 GHz y 2,45 GHz usando EM CAD Microware Studio por Simulación por computadora Tecnología (CST®). Las dimensiones que lograron la optimización se muestran en la Sección III. Este ajuste logra ganancias máximas de 4,39 dBi, 4,18 dBi y 4,04 dBi para 2,3 GHz, 2,4 GHz y 2,45 GHz respectivamente.

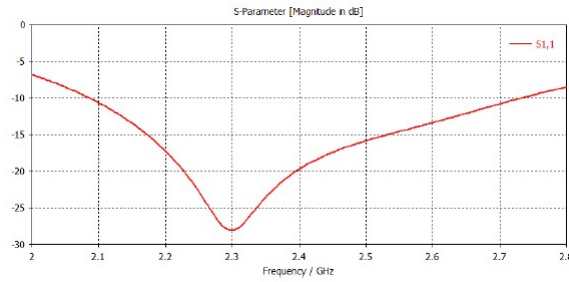


Figura 8.4: Parámetro simulado S11.

El rango de frecuencia de trabajo VSWR simulado (Fig. 5) de 2,25 GHz a 2,45 GHz con un umbral de 1,45.

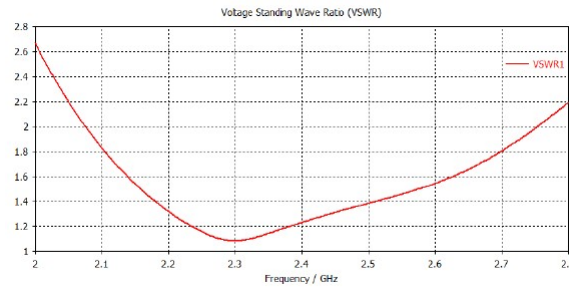
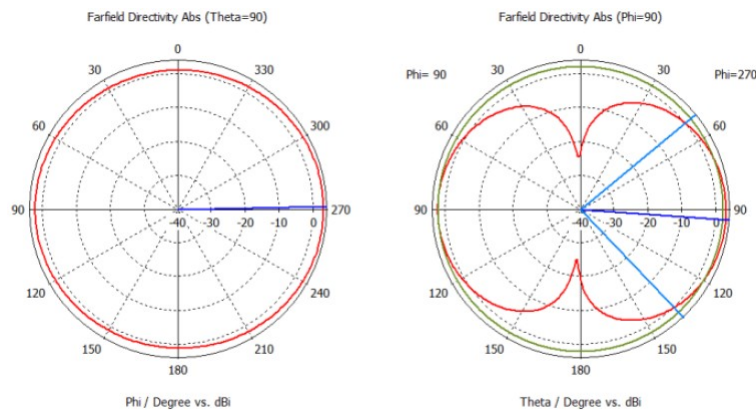


Figura 8.5: Simulación de VSWR.

Dado que una antena fractal irradia en un patrón normal a su superficie de bucle, el patrón de azimut para  $\theta = 90^\circ$  es importante. Los patrones de radiación azimutal y de elevación para nuestras frecuencias de trabajo son similares, como vemos en las Figs. 6-8.

Figura 8.6: Patrones de radiación de azimut y elevación simulados a  $2 \cdot 3$  GHz.

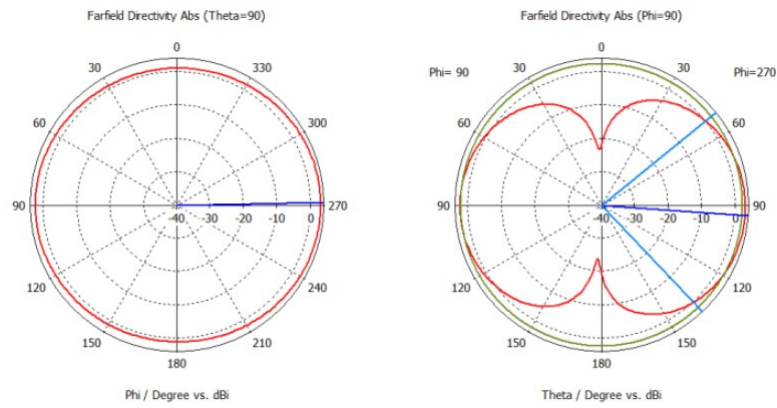


Figura 8.7: Patrones de radiación de azimut y elevación simulados a  $2.4$  GHz.

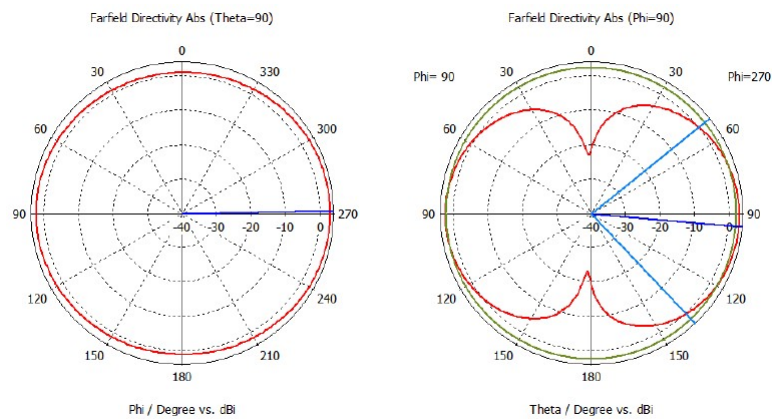


Figura 8.8: Patrones de radiación de azimut y elevación simulados a  $2.45$  GHz.

## 8.4. Medidas de construcción y laboratorio

La antena fue construida por O. Gonzales en los laboratorios de INRAS durante un período de dos meses y probada por R. Diaz y O. Gonzales en el Laboratorio de Telecomunicaciones de la PUCP. El instrumento principal utilizado fue un Vector Network Analyzer (VNA).

Los resultados de las mediciones muestran un buen acuerdo con la simulación; además, los valores VSWR y S11 (Fig. 4-5) muestran un mejor rendimiento que el simulado. Según el parámetro S11, la banda de frecuencia de trabajo de la antena va de  $2.21$  GHz a  $2.5$  GHz, con un umbral de  $-10$  dB. S11 mínimo se encuentra a  $2.31$  GHz con un valor de  $-39.56$  dB. Según VSWR, la banda de frecuencia de trabajo va de  $2.25$  GHz a  $2.44$  GHz, con un umbral  $1.4$ . VSWR mínimo se encuentra en  $2.31$  GHz con un valor de  $1.02$ .

La prueba del patrón de radiación se realizó en las instalaciones libres de ruido del laboratorio de telecomunicaciones. Se necesita un amplificador para que la señal de campo lejano pueda ser discriminada desde el nivel de ruido. Se colocó el transmisor en el centro de un círculo de tres metros y medimos la potencia recibida con el VNA a intervalos de un grado a lo largo de la circunferencia, utilizando la antena que se prueba en cada extremo. La configuración general del experimento y las mediciones se realizaron durante un período de 2 días. Éstos se procesaron posteriormente para mostrarlos en el presente texto.

Se realizó mediciones de patrón de radiación, que mostró similitud con los valores simulados (Fig. 9). Sin embargo, estimamos que necesitan ser verificados en una cámara anecoica en un futuro cercano.

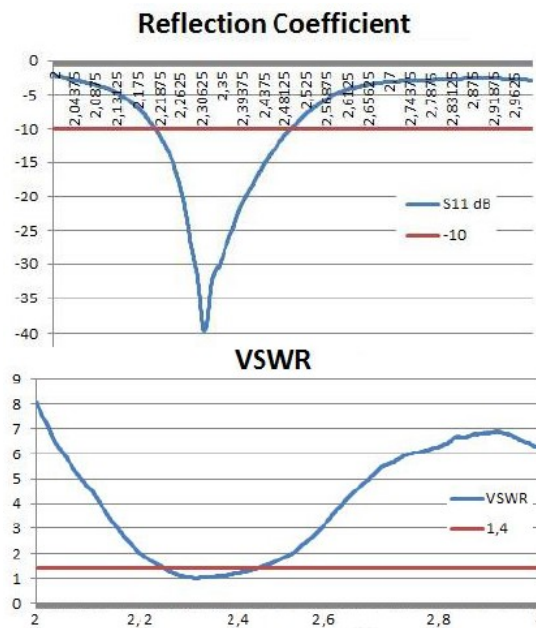


Figura 8.9: Coeficiente de reflexión medido (S11) y VSWR.

A partir de esto podemos decir que Una antena microstrip fractal S-Band para comunicaciones en CubeSat, se puede trabajar en la banda S y el Tenemos demostrado que un diseño fractal con el número adecuado de iteraciones es óptima para aplicaciones CubeSat en términos de presupuesto, peso y dimensiones. En el presente artículo se ha logrado una antena con dimensiones de  $3.5 \text{ cm} \times 4.5 \text{ cm}$  y un sistema de trabajo de  $2.3 \text{ GHz}$ . frecuencia sobre un subtratamiento FR-4. Las pequeñas dimensiones de la antena nos impide diseñar un despliegue complejo y reducir el peso del satélite.

La frecuencia de trabajo de la antena va desde  $2.25 \text{ GHz}$  a  $2.45 \text{ GHz}$  y se sintoniza a  $2.3 \text{ GHz}$ , que pertenece a la banda S frecuencias. Tiene un patrón de radiación omnidireccional con una ganancia máxima de  $4.39 \text{ dBi}$ , la antena fabricada medida en el valor S11 es de  $-39.56 \text{ dB}$  y el desarrollo omnidireccional del patrón de radiación permite a los CubeSats usar un sistema de estabilización de actitud para mantener un enlace de comunicación sin necesidad de un sistema de puntería.

Como futuro trabajo de investigación se está planeando continuar con la investigación para homogeneizar el patrón de radiación omnidireccional mediante una análisis de la dimensión fractal utilizada y su influencia sobre la los campos electromagnéticos de la antena. Finalmente, con más pruebas utilizando sistemas de evitación de interferencias y la adquisición de herramientas de medición adecuadas, esperamos mejorar las mediciones del patrón de radiación.

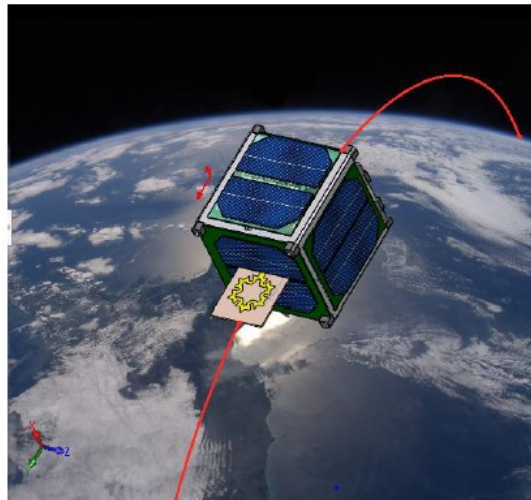


Figura 8.10: Desgined fractal antenna desplegada en CubeSat.

## Conclusiones

Después de escribir el presente texto, podemos concluir que:

1. El Teorema del punto fijo de Banach juega un papel muy importante en la construcción de los Conjuntos Fractales Clásicos.
2. Los Sistemas de Funciones Iteradas (IFS) juegan un papel muy importante en la construcción del Operador de Hutchinson.
3. Es posible construir un Sistema de Funciones Iteradas que modelen aproximadamente una imagen natural.
4. Es posible codificar en el Software Científico Mathematica 11.0 un programa que generen imágenes naturales aproximadas.
5. Es posible encontrar en la naturaleza diversos procesos que se pueden modelar mediante la geometría fractal.



## Recomendaciones

Recomendamos a los lectores poner en práctica lo siguiente:

1. Familiarizarse con los conceptos básicos de Análisis, Topología y Teoría de la Medida, con la finalidad de poder comprender la justificación rigurosa sobre la existencia de los Conjuntos Fractales.
2. Familiarizarse con la estructura de la programación modular del Software Científico Mathematica 10.0, así como los comandos “Map”, “Flatten”, “Partition” con el objetivo de poder comprender la programación determinística aplicada en la generación de las imágenes.
3. Elaborar un trabajo en el cual los resultados sean visualizados en 3D.



# Bibliografía

- [1] PLAZA, Sergio. “Fractales y Generación Computacional de Imágenes”. Monografías del IMCA (Instituto de Matemática y ciencias afines), LIMA- PERÚ 1990.
- [2] TARRES, Juan. “Sobre la historia del concepto topológico de curva”. Historia de la Gaceta (Departamento de geometría y topología de la Univesridad Complutense de Madrid), Madrid-España 2010.
- [3] FALCONER, Kenneth. “Fractal Geometry”. Mathematical foundations And Applications, Cambridge University Press 1989.
- [4] AGUIRRE, Julián. “Curvas Fractales”. Sigma: Revista de matemáticas Vol. 20, Vitoria - España 2002.
- [5] MACHO, Marta. “Topología General”. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad del Pais Vasco Managua - Nicaragua 2002.
- [6] MACHO, Marta. “Curiosidades sobre el Conjunto de Cantor”. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad del Pais Vasco Bizkaia - España 2001.
- [7] RITORÉ, Manuel. “Geometría de conjuntos convexos”. Notas de curso, Universidad de Granada. Granada - España 2004
- [8] RITORÉ, Manuel. “Apuntes de teoría de la medida”. Notas de curso, Universidad de Extremadura. Badajoz - España 2014
- [9] BARNSLEY, M y DEMKO, S. “Iterated Function Systems And The Global Construction Of Fractals”. Proc. Roy. Soc. London 1985.
- [10] FEDER, Jens. “Fractals”. Plenum Press Corporation, USA New York, 1998.
- [11] HUTCHINSON, J. E. “Fractal And Self - Similarity”; Math.J. Indiana Univ. USA 1981.
- [12] MASSOPUST, Peter R. “Fractal functions”; Academies Press inc. USA, New York, 1994.
- [13] SWARTWOUT, M. “The first one hundred CubeSats: A statistical look,” J. Small Satell., vol. 2, pp. 213–233, 2014
- [14] NUGENT, R and MUNAKAT, R and CHIN, A and Coelho, R and PUIQ - SUARI, J. "The CubeSat: The picosatellite standard for research and education,” Aerosp. Eng., vol. 805, pp. 756–5087, 2008.

- [15] PITELLA, E and NASCETTI, Augusto. "Design of an Antenna System for CubeSat Satellites," Conference: 2nd IAA Conference on University Satellites Missions and CubeSat Winter Workshop, February 2013.
- [16] HERAUD, J and PRATT, H and MORENO, J and YARLEQUÉ, M and GALVEZ, G and VILCHEZ, R and MENENDEZ, D and VILCHEZ, N and FERNANDEZ, Joel and CENTA, V and RIVERA, R and CARRERO, F and TRUJILLANO, F and PERALTA, J and VELARTE, O and JAVE, J and POSTIGO, D and YIPMANTIN, A and TEJADA, A and PIMINCHUMO, O. "PUCP-SAT-1 and Pocket-PUCP: A double Peruvian satellite launch project". International Academy of Astronautics IAA Book Series. ISBN/EAN: 978-2-917761-19-9, pp.497-507, 2013.
- [17] A. Nascetti, E. Pittella, P. Teofilatto and S. Pisa, "High-Gain S-band Patch Antenna System for Earth-Observation CubeSat Satellites," in IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, vol. 14, no. , pp. 434-437, 2015.
- [18] V. Francois-Lavent. "Study of passive and active attitude control systems for the OUTFI nanosatellites." M.A. thesis, University of Liège, Belgium, 2010.
- [19] J. Costantine, D. Tran, M. Shiva, Y. Tawk, C. G. Christodoulou and S. E. Barbin, "A deployable quadrifilar helix antenna for CubeSat," Proceedings of the 2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation, Chicago, IL, 2012, pp. 1-2.
- [20] Mario Patricio Herrera Holguín, Juan Carlos Inclán Luna, "Estudio y Metodología de Diseño de Antenas Utilizando Geometría Fractal", Lic. dissertation, Dept. Elect. and Telecom. Eng., Escuela Politécnica Nacional, Quito, OCT, 2004.
- [21] Balanis, C.A., Antenna Theory, Analysis and Design, John Wiley and Sons. Inc, 1997.
- [22] NASA (2015, March 1). "Edison Demonstration of Smallsat Networks" [Online].